FM1001-01 Matemática I: Bases del Álgebra Lineal
Profesor: Rodrigo López.
Auxiliar: Sebastian Aguilera M., Francisca Mery D.
Ayudantes: Joaquín Márquez, Valentina Reyes.

Programación Lineal

23 de enero de 2019

Introducción

¡Saludos! Esta es la última materia del curso, y como ayuda, hemos decidimos hacer una breve explicación de cómo resolver los problemas de Programación Lineal, con ejemplos desarrollados. ¡Esperamos que les sirva!

¿Cóncavo o Convexo?

Antes de cualquier cosa, en general los problemas que resolverán (o que pueden resolver con los conocimientos que les entregarán) son los que son relativos a conjuntos convexos. ¿Qué significa esta cosa? Pues que no tienen como una "boca" o algo parecido, otra definición es que todos sus ángulos interiores son menores a 180^o, lo cual hace que algebraicamente tengan propiedades muy ***bakanosas y bonitas***.

Una definición formal es que un conjunto convexo es uno en el cual cualquier segmento de recta que una un par de puntos cualquiera del conjunto estará adentro del conjunto (la linea no se "saldrá"). Formulísticamente esto se ve como lo siguiente, con A, B puntos, λ cualquier valor entre 0 y 1 y $\mathbf{C}$ el conjunto:

$$\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathbf{C}$$

Esto por sí solo no es probable que lo ocupen en lo que queda del curso, les damos la definición con el objetivo de ser lo más "rigurosos" posibles.

Sistemas de Inecuaciones:

En la unidad anterior nos acostumbramos a trabajar con sistemas de ecuaciones que eran como:

$$x + y = 4$$
$$x - y = 2$$

Lo cual lo podíamos ver como la intersección (vale decir, donde las 2 rectas se tocan o cortan) de 2 rectas en el plano. en el caso del ejemplo, el dibujo sería el siguiente:

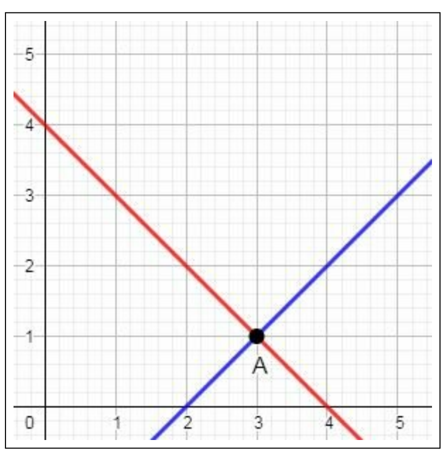


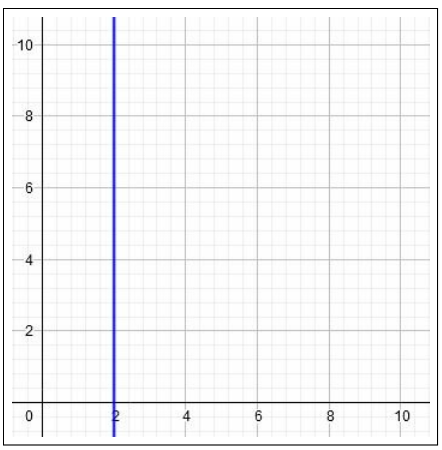
Figura 1: La solución del ejemplo es el punto $(3, 1)$ (Que se muestra como el punto A)

Ahora bien, ¿Cómo podemos ver un sistema de inecuaciones gráficamente? Podemos verlo como que con cada inecuación pintamos una parte del plano, como en el siguiente ejemplo:

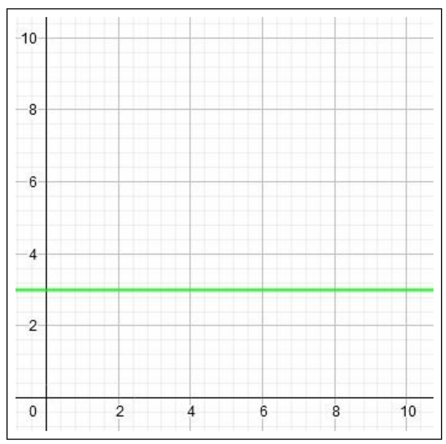
$$\begin{aligned} x &\geq 2 \\ y &\geq 3 \\ -x-y &\geq -8 \end{aligned}$$

Para resolverlo lo que se suele hacer es lo siguiente:

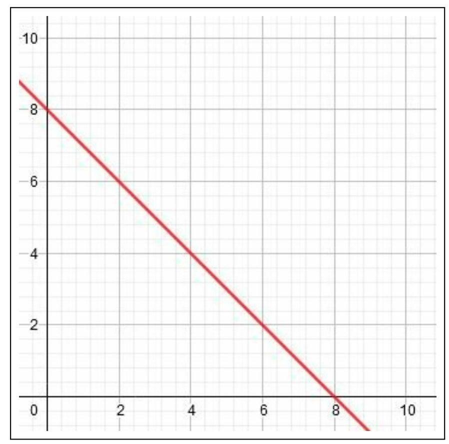
1. Dibujar cada recta que representaría cada desigualdad si fueran igualdades, esta recta en cada caso representaría la "frontera" de cada desigualdad, como el caso límite. Con el ejemplo que nos dimos sería graficar:



(a) $x = 2$



(b) $y = 3$

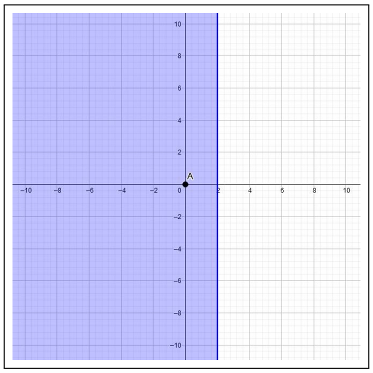


(c) $x + y = 8$

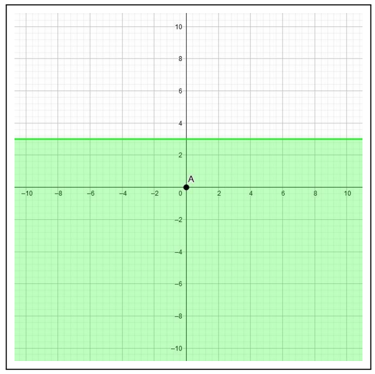
2. Luego, ya que tenemos las "fronteras", tenemos que ver que lado de la recta debemos pintar, para eso, lo que se suele hacer es comprobar lo siguiente: Si reemplazo el x por 0 y el y por 0, ¿Se cumple la desigualdad? Si es que sí se cumple, pintamos el lado que **NO** incluye al punto $(0,0)$, de lo contrario, pintamos el otro lado, en este caso (básicamente pintamos el lado que no es solución, de manera que cuando hayamos pintado todo nos quede el conjunto solución sin pintar y fácil de identificar):

$$\begin{array}{rcc} x \geq 2 & \text{Reemplazamos} & 0 \geq 2 \\ y \geq 3 & \text{cada letra con 0} & 0 \geq 3 \\ -x-y \geq -8 & \Rightarrow & 0 \geq -8 \end{array}$$

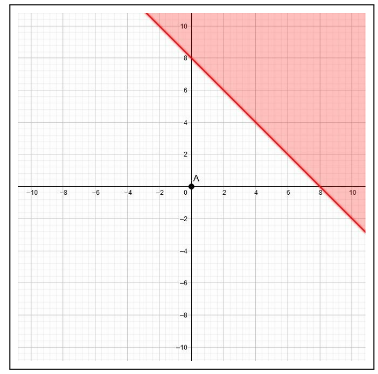
Así, notemos que en el primer y segundo caso, nos da cosas falsas (ya que sabemos que $2 > 0$, $3 > 0$), entonces deberemos pintar hacia el lado que **SÍ** incluye al 0, pues éste no incluye la solución, en cambio con la tercera nos dá algo verdadero, entonces pintamos el lado que no incluye el punto $(0,0)$. Nos quedaría en cada desigualdad un dibujo así:



(a) $x \geq 2$

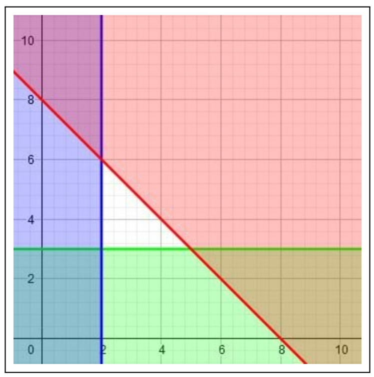


(b) $y \geq 3$

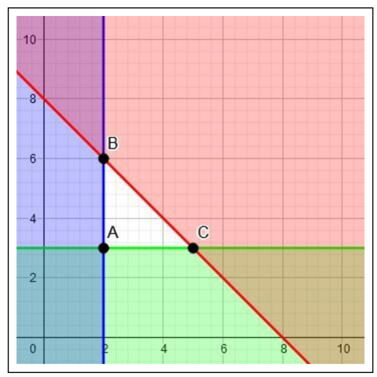


(c) $x + y \geq 8$

3. Y luego el paso final es ¡Juntar los dibujos (a), (b) y (c) anteriores! El conjunto solución (es decir, el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen las 3 inecuaciones simultaneamente) es aquel que tiene toda esa parte sin pintar, retomando el ejemplo:



(a) El conjunto solución es la parte que está en blanco.



(b) El conjunto solución destacado, es el triángulo ΔABC

Con esto listo, ya tenemos como sacar el conjunto solución de un sistema de inecuaciones. Es como "limitar" el plano a una figura específica, en el caso del ejemplo era un triángulo, sin embargo pueden ser varias otras figuras más. A partir de ésto podemos hacer lo siguiente, que es realizar un problema de programación lineal.

Problema de Programación Lineal (PPL)

Un problema de programación lineal es uno que combina (por decirlo de alguna forma, en estricto rigor no es tan así) un sistema de inecuaciones y una función objetivo (que será una formulita con x e y que deberá cumplir las restricciones de las desigualdades), de modo que debes encontrar, con las restricciones del sistema de inecuaciones la combinación (x, y) más ***bakanosa*** (es decir la que cumpla que la función objetivo sea lo más grande posible o lo más pequeña posible).

Para enfrentar un Problema de Programación Lineal (PPL de ahora en adelante), lo que se suele hacer es un trabajo en 2 pasos:

1.-Modelar

Todos los problemas que se ven de PPL, parten de una situación real o medianamente real, con lo cual tendremos que hay que traducir lo que dice el problema a un sistema de inecuaciones y una función objetivo. Notemos una cosa: Hay situaciones en las cual por definición no pueden tener respuestas negativas, por lo cual varias veces se pone como restriccion en el sistema de inecuaciones $x \geq 0$ y/o $y \geq 0$.

Por ejemplo, podemos poner la siguiente situación:

"Usted desea comprar la mayor cantidad de fruta, dispone unicamente de 5000$ *y los precios de las manzanas es de* 300$ *la unidad y las naranjas tienen un precio de* 500$ *la unidad. Encuentre la mayor cantidad de fruta que puede comprar."*

Lo que más nos conviene hacer para comenzar es asignar variables, queremos comprar fruta, la cual compraremos por unidad, entonces lo que más nos conviene es asignar variables a, en este caso, la cantidad de manzanas que compremos y la cantidad de naranjas que compremos. A la cantidad de manzanas la llamaremos x, y a la cantidad de naranjas que compremos y.

Pensemos en una restricción intuitiva: Solo se pueden comprar un número positivo de manzanas y de naranjas, por lo que tendremos $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Parece que ya no hay más restricciones intuitivas que poner aparte de las ya mencionadas. Notemos que tenemos 5000$, sin embargo, no por eso lo vamos a gastar todo ¿Cierto? Lo que sí tenemos claro es que no podemos gastar más de 5000$, entonces tendremos que el total de dinero gastado en comprar la fruta será menor o igual a 5000. ¿Cómo calculamos el precio? Pues multiplicando el precio por unidad de cada fruta por el numero de frutas que compremos respectivamente, así obtenemos la restricción: $300x + 500y \leq 5000$

Así parece que terminamos las restricciones, solo nos queda una cosa más y... ¡El modelamiento de la situación está completo! Esa cosa es la función objetivo, esta estará representada por lo que queramos hacer, que en este caso será *maximizar el numero de fruta que comprar*. Así tendremos que será maximizar la fórmula $x + y$. El resultado de esta fórmula depende de 2 variables (x e y) por lo que se denota como $f(x, y) = x + y$. Luego, ya tenemos listo el modelamiento de la situación, sería:

$$\begin{array}{rc} max & x+y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & 300x + 500y \leq 5000 \end{array}$$

¡Con ésto hemos concluído el modelamiento de la situación! Ahora nos queda el siguiente paso, que es...

2.-Resolución

Llegados hasta aquí tenemos casi todo listo, ahora... ¿Como encuentro una solución ***bakanosa***? Sabiendo que "solución bakanosa" es un punto (x, y) en la figura que se forma al resolver un sistema de desigualdades, de forma que al meter x e y en la función objetivo (recordando que esto es la formulita que representa nuestra tarea final), se saca el máximo o mínimo valor posible con las restricciones de las desigualdades.

Hay cierto teorema que nos sirve para esto, nos dice que el punto máximo o mínimo se encuentra en al menos un vértice de la figura que se forma. ¿Cómo podemos saber cual es? Hay 3 métodos.

- **Fuerza Bruta**: Es literalmente comprobar vértice por vértice. Reemplazando las coordenadas x e y de éstos en la formulita y compararlos. Con pocos puntos salva igual.

- **Simplex**: Es un método un tanto más "lógico", está pensado para que se pueda programar en un computador (de manera que si llegas con un problema con muuuuuchos puntos, puedas meterlo a una máquina y que ésta la resuelva). Consiste en partir desde un vértice, y calcular cuanto vale en ese vértice la formulita del principio (al reemplazar allí con los x e y del vértice). Después comparas el resultado (valor del vértice en la formulita) de ese vértice con los resultados de los 2 vértices colindantes, y comparas, luego tu accionar depende de si quieres encontrar el valor más grande (máximo) o el más chico (mínimo), en cada caso:

  - **Máximo** Te mueves consecutivamente al que tenga el valor más grande entre los 3 vertices que conoces (es decir, en el que estás y los 2 colindantes), hasta que el vértice en el que estés sea como una "montañita" que tenga sus 2 vértices colindantes con valores menores en la formulita.

- **Mínino** Idéntico a lo del máximo, solo que te mueves al vértice más chico entre los 3 que conoces (el propio y los 2 colindantes). Luego, si estás en un "valle" en el que los 2 vertices colindantes tengan un valor superior al propio, significa que llegaste al mínimo.

- **Curvas de Nivel**: Un método que tiene sentido geométrico y que tiene un nombre bastante pomposo, sin embargo es más intuitivo de lo que parece. Consiste en la siguiente lógica: Cuando tienes una recta de la forma $Ax + By = C$, si cambias el valor de C lo que estás haciendo es mover la recta de un lado a otro. Tendiendo ésto en cuenta, lo que hace el método es:

  1. Te das un C de modo que la recta (que es la formulita con x e y que llamamos "función objetivo") pase por el conjunto solución
  2. Recuerdas que la fórmula del vector normal a una recta de la forma $Ax + By = C$ es (A, B)
     - Al mover la recta en ese sentido (el sentido (A, B)) **SIEMPRE** terminarás en el máximo de la formula.
     - Caso contrario, si mueves la recta en el sentido contrario a (A, B) (es decir, en el sentido $(-A, -B)$) **SIEMPRE** terminarás en el mínimo de la fórmula.
  3. Te fijas en cual es el punto que será el último en ser tocado si mueves la recta $Ax + By = C$ según el vector (A, B) o $(-A, -B)$. Dicho punto es el mínimo o máximo según corresponda, y entonces reemplazas los valores de x e y del vértice en la fórmula.