FM1001-01 Matemática I: Bases del Álgebra Lineal
Profesor: Rodrigo López.
Auxiliar: Sebastian Aguilera M., Francisca Mery D.
Ayudantes: Joaquín Márquez, Valentina Reyes.

Para estudiantes de Educación Básica y Media.
UNIVERSIDAD DE CHILE

Comentando las materias: Geometría Analítica

17 de enero de 2019

Planos en $\mathbb{R}^3$

¡Oh! ¡Hemos terminado con casi todo lo de rectas que verán en éste curso! :D Ahora probaremos con un nuevo concepto: El plano. ¿Qué es un plano? ¿Cómo lo podríamos imaginar? Lo podríamos ver como una hoja de papel "tensa". ¿Cómo podemos verlo matemáticamente? ¡Oh no! Esta pregunta parece demasiado complicada **AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA**

[**Problemas Técnicos**]

[**Volviendo a la transmisión**]

Tras este problema técnico, los dejaremos con un clickbait, pues esta pregunta se resuelta en el proximo ítem, en el que definiremos la forma vectorial del plano. Dato: Este tema se aliviana bastante si lo vemos con hartos dibujos, con eso se entiende bastante :o Así que... ¡Vamos allá!

Forma vectorial del Plano

¿Como podemos ver un plano? Si alguien acá en algún motivo extraño usó internet explorer y se le quedaba pegado, si movía la ventana de dicho programa, quedaba como un "rastro" que seguía la ventana. Podemos ver de una forma similar la forma vectorial del plano, otra manera de verlo es como tomando un hilo pintado de manera que quede marcado el camino que haga e ir moviéndolo en linea recta en algún sentido del plano.

¿Como podemos representar esto de forma vectorial? Tomando una recta de forma vectorial y luego la queremos mover en linea recta en algún sentido del plano, nos quedaría algo como esto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix})$$

Acá vamos a "agregarle" un vector con ponderación, para representar que estaremos moviendo la recta según otro vector más, quedándonos como sigue:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}) + \lambda_2 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ojo aquí, ya que tendremos que λ_1 no tiene porqué ser igual a λ_2, además de que tiene literalmente un significado bastante similar con el vector director de la recta.
Esto que acabamos de escribir es la llamada "forma vectorial del plano"m y suele ser bastante útil para hacer ciertos manejos matemáticos en $\mathbb{R}^3$ A los vectores que podemos ponderar por cualquier numero real (Es decir, multiplicar por cualquier valor real, representado por λ) se les llama **Vectores Directores del Plano**

CUIDADO: Estos 2 vectores directores no pueden ser paralelos, debido a que te estaría quedando otra recta, es decir, no sería un plano.

A modo de ejemplo, pensemos en el plano XY (z=0) (que en el dibujo del ejemplo está verde), que se puede representar con los vectores $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en rojo en el dibujo) y $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en azul en el dibujo) y en el punto $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (el cual mostraremos a partir del vector de partida de color negro) perteneciente al plano XY.

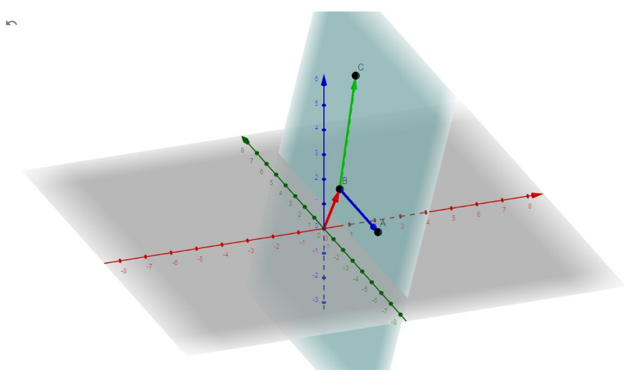
Notemos que el punto p puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores directores $\vec{d_1}$ y $\vec{d_2}$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{d_1} + 4 \cdot \vec{d_2} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

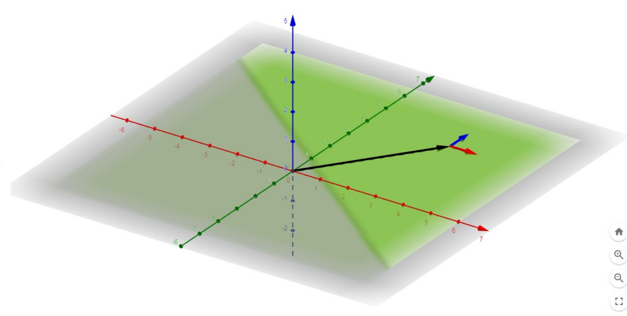
Ahora, viendo lo anterior pero de forma general, para un punto arbitrario cualquiera $p = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que se puede generar el nuevo punto p siguiendo la misma lógica:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \vec{d_1} + b \cdot \vec{d_2} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior quiere decir que podemos generar todos lo puntos del plano XY usando dos vectores directores y un punto. Ésto es extendible a *cualquier plano*



(a) En rojo el vector que señala al punto "inicial", en azul un vector director y en verde otro. En color celeste está el plano generado con ésto



(b) El ejemplo

Forma general del plano en $\mathbb{R}^3$

Existen varias formas de expresar un plano matemáticamente, esta es una de ellas, el procedimiento que haremos a continuación es como la "demostración" de que se puede escribir así un plano, en los problemas de la vida real nadie (o casi nadie) hace lo de mostraré a continuación porque es bastante engorroso. Sin embargo sirve para mostrarles que siempre hay varias maneras de hacer las cosas :D Dejen que su imaginación fluya, las matemáticas (y las ciencias en general) avanzan gracias a cosas así. Al final de esta parte les mostraré un método común para sacar la forma general de la recta. Acá se hace un procedimiento parecido al que se hizo para sacar la forma general de la recta en $\mathbb{R}^2$, en el que eliminaremos los λ que acompañan a los vectores directores para que nos quede todo en función de las coordenadas x, y y z. (Acá asumiremos que tanto d_2 como e_2 son distintos de 0, para poder amplificar y todo. Los casos con 0's los analizaremos al final)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x = a + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 e_1 \\ y = b + \lambda_1 d_2 + \lambda_2 e_2 \\ z = c + \lambda_1 d_3 + \lambda_2 e_3 \end{matrix} \iff$$

$$\begin{matrix} x - a = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 e_1 \\ y - b = \lambda_1 d_2 + \lambda_2 e_2 \\ z - c = \lambda_1 d_3 + \lambda_2 e_3 \end{matrix} \iff \begin{matrix} (x-a)d_2 = \lambda_1 d_1 d_2 + \lambda_2 e_1 d_2 \\ y - b = \lambda_1 d_2 + \lambda_2 e_2 \\ (z-c)d_2 = \lambda_1 d_3 d_2 + \lambda_2 e_3 d_2 \end{matrix}$$

Aquí trataremos de eliminar tanto λ_1 y λ_2, lo cual haremos sumando a la ecuación del x la ecuación del y amplificada por d_1 y a la ecuación del z la ecuación del y amplificada por d_3, luego tendremos 2 ecuaciones y solo con una variable (en este caso λ_2), por lo que ignoraremos la ecuación con el y, ya que ya "fué incluída" en las otras 2, obteniendo:

$$\begin{matrix} (x-a)d_2 - (y-b)d_1 = \lambda_2 e_1 d_2 - \lambda_2 e_2 d_1 \\ (z-c)d_2 - (y-b)d_3 = \lambda_2 d_3 d_2 - \lambda_2 e_3 d_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} (x-a)d_2 - (y-b)d_1 = \lambda_2(e_1 d_2 - e_2 d_1) \\ (z-c)d_2 - (y-b)d_3 = \lambda_2(d_3 d_2 - e_3 d_2) \end{matrix}$$

Ahora fijemonos en lo que acompaña a λ_2, ¿Que significaría que alguno fuera 0? Pues que en la ecuación en la que lo que acompaña al 0 ya tendríamos lista la fórma general del plano (Esto lo ahondaremos más a fondo al terminar con los casos sin nada con 0). Por lo que este caso sería como "simple", asumiremos que en ambas ecuaciones entonces todas las cosas son bonitas y distintas a 0 :3, para simplificar los cálculos, llamaremos a lo que acompaña a λ_2 en cada caso τ_1 (en la ecuación que tiene la x) y τ_2 (en la ecuación que tiene la z) respectivamente:

$$\begin{matrix} (x-a)d_2 - (y-b)d_1 = \lambda_2 \tau_1 \\ (z-c)d_2 - (y-b)d_3 = \lambda_2 \tau_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} \frac{(x-a)d_2 - (y-b)d_1}{\tau_1} = \lambda_2 \\ \frac{(z-c)d_2 - (y-b)d_3}{\tau_2} = \lambda_2 \end{matrix}$$

Luego, tenemos que ambas cosas son iguales a λ_2, como ambos son iguales a lo mismo, entonces... ¡Son iguales entre sí! :D Lo que nos permite llegar a una formula que solo contiene x, y y z, que es de hecho de la siguiente forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Que es basicamente una fórmula que te describe un plano solo en función de sus coordenadas, lo cual en algunos casos facilita bastante el trabajo. Ahora pasaremos a explicarles que significan los casos con alguna cosa 0. (En estos casos básicamente nos permitía saltarnos pasos para acercarnos más rápidamente al final)

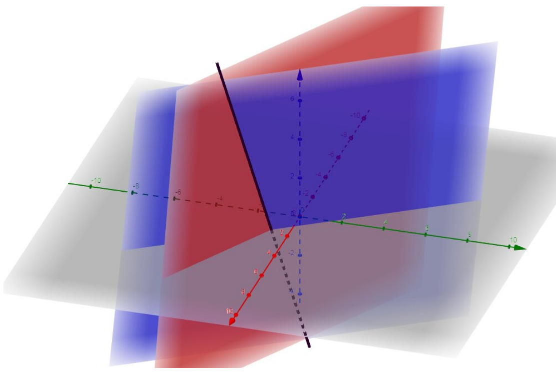
- **Si solo uno de los números en uno de los vectores directores es 0** Pues, lo que resultaría más cómodo hacer en ese caso es "eliminar" el λ que ya estaba acompañado por un 0, en los otros 2, para después llegar directamente al caso con solo un λ, básicamente te acorta un paso porque "ya está hecho".

- **Con un cero en cada vector director en una misma componente** Ya estás listo, porque al hacer la cosa con las ecuaciones del principio, quedas con una fórmula libre de los λ, lo cual era a lo que queríamos llegar, entonces ya llegaste a una formula general.

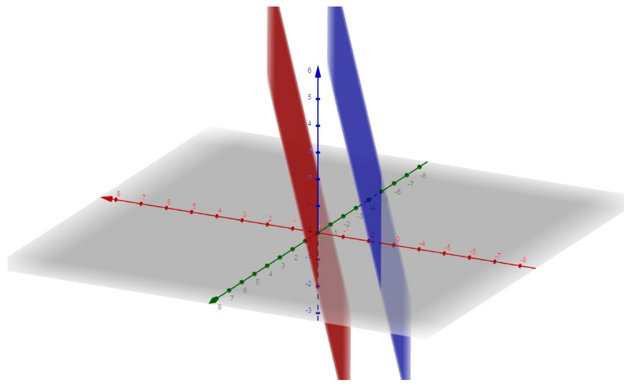
- **Con un 0 en cada vector director, pero en diferentes ubicaciones:** Es parecido al primer caso que nombramos, entonces lo que resultaría útil es "eliminar" algún λ en la fórmula en la que aparecen los 2 λ usando alguno de los que tiene 0's, y así llegamos al paso que tiene 2 formulas en las que hay que eliminar el λ restante.

Intersección de planos

Ya que hemos trabajado bastante con planos, veremos como intersectar 2 planos entre sí. A lo cual nos entra una duda: ¿Como podemos ver la intersección entre 2 planos? Tras pensarlo un rato ~~Jugar con Geogebra bastante rato~~, podemos ver que se tienen 2 casos posibles: Que se intersecten como recta (Como en el dibujo de la izquierda) o que no se intersecten (Que sean paralelos, como en el dibujo de la derecha).



(a) 2 planos intersectados, con la interseccion en oscuro



(b) Planos que no se intersectan

¿Como podemos calcularlo? Tendremos un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas si lo escribimos con ambos planos de la forma ”general”, entonces lo que se suele hacer es dejar una variable libre, como por ejemplo:

$$\begin{matrix} x+2y-z=12 \\ x-2y-z=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x+2y=12+z \\ x-2x=z \end{matrix} \underset{\iff}{\text{Acá vamos a trabajar como si fuera un sistema de 2x2 con } x \text{ e } y} \begin{matrix} 2x=12+2z \\ 4y=12 \end{matrix} \iff$$

$$\begin{matrix} x=6+z \\ y=3 \end{matrix}$$

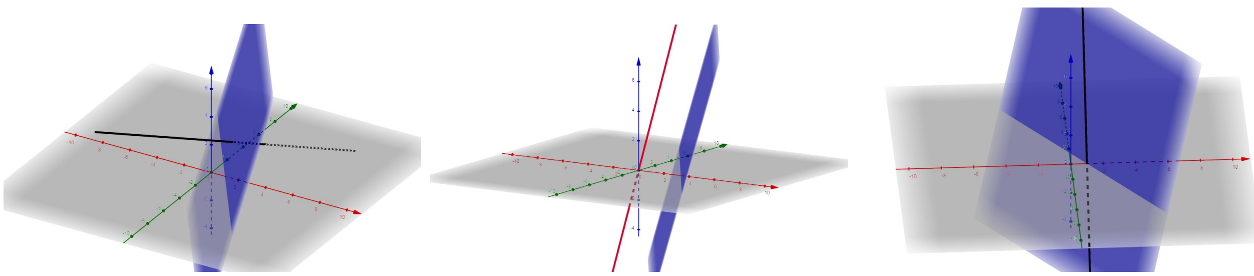
Lo cual lo podemos ver como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+z \\ 3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Intersección de planos con rectas en $\mathbb{R}^3$

Ahora, llegamos al final de esta graaan guía: Tenemos que ver que pasa cuando tenemos 1 plano y una recta, tras pensarlo un poco (como ”viéndolo”), se ven 3 posibilidades:

1. Se intersectan 1 vez
2. Son paralelas y no se intersectan
3. La recta está en el plano



(a) Se intersectan 1 vez (b) Son paralelos entre sí (c) Recta en el Plano

La forma de comprobar que caso es de los anteriores es fijándonos en los vectores directores del plano respecto al de la recta: Si el vector director de la recta es combinación lineal de los vectores directores del plano, tendremos solo como posibles casos 2 y 3. Para distinguir el caso, tenemos que notar: Si algún punto de la recta pertenece al plano, entonces está en el caso 3, de lo contrario, no.

Resumen

(compilación formulística)

Intersección de planos con rectas en $\mathbb{R}^3$