FM1001-01 Matemática I: Bases del Álgebra Lineal
Profesor: Rodrigo López.
Auxiliar: Sebastian Aguilera M., Francisca Mery D.
Ayudantes: Joaquín Márquez, Valentina Reyes.

Comentando las materias: Geometría Analítica

17 de enero de 2019

Inicio

¡Saludos chicos! Como vimos que estaban bastante complicados con la materia de geometría analítica (rectas y planos), decidimos que sería buena idea hacerles una guía que les explique de manera simple esta materia. Los temas que toca esta guía en particular son:

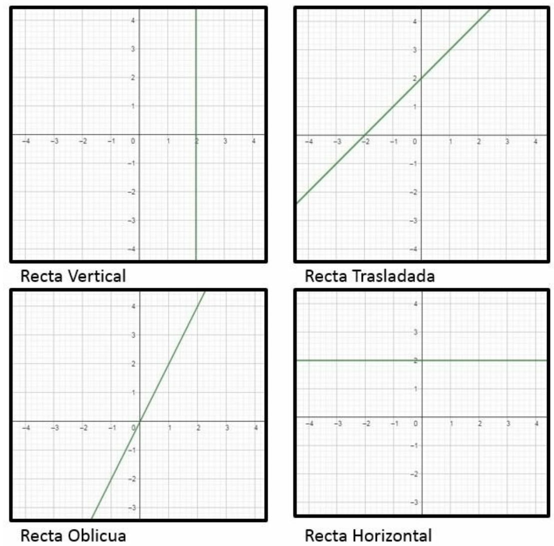
1. Rectas en $\mathbb{R}^2$
   - *a*) Forma Vectorial
   - *b*) Forma General
   - *c*) Paralelismo en $\mathbb{R}^2$
   - *d*) Perpendicularidad en $\mathbb{R}^2$
   - *e*) Intersección de Rectas en $\mathbb{R}^2$
2. Rectas en $\mathbb{R}^3$
   - *a*) Forma Vectorial
   - *b*) Paralelismo en $\mathbb{R}^3$
   - *c*) Perpendicularidad en $\mathbb{R}^3$

Con todo esto dicho ¡Comencemos!

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Intuitivamente, si les preguntamos ¿Qué es una recta? Seguramente dirán algo como "Una linea recta" o que "Lo que puedo hacer usando una regla de forma común", lo cual puede ser un buen punto de partida. En el caso de las rectas en $\mathbb{R}^2$ (vale decir, en 2D) Una recta la podemos tener dibujada en el plano cartesiano como en la imagen de la derecha:

Como podemos ver, las rectas son parecidas entre sí, solamente que en algunos casos están como inclinadas o movidas respecto al origen. ¿Como podemos diferenciarlas entre sí? Hay variadas formas, partiremos mostrándoles la llamada "forma vectorial" de la recta, que trata de describir una recta diciendo como "*Partes desde un lugar y después te mueves siguiendo una flecha*".



Forma vectorial de la recta en $\mathbb{R}^2$

Esta forma de escribir la recta aprovecha el conocimiento que tienen sobre vectores (si es que no los entendieron bien, podemos explicarlo si lo piden). En general se basa en la lógica de "Tengo una posición *inicial*, y esta la voy trasladando según una ponderación de un vector fijo". Lo cual solemos identificar con la siguiente fórmula

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

¡Esto parece chino! ¿Que querrá decir? Vayamos por partes:

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: Esto trata de simbolizar algo así como el punto "cualquiera", o "genérico" perteneciente a la recta, es decir, es como el resultado tras meter algún λ en el lado derecho de la igualdad antes mencionada

- $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: Esto es como una suerte de "punto de partida", es como un punto fijo que SABEN que está en la recta.

- $+$: Es para mostrar la suma de vectores, es decir, empiezas del punto de partida anterior ($\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$) y después le agregas una cosa, que es lo que vamos a mostrar a continuación.

- $\lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$: El vector $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ es la cosa que mueve al punto por así decirlo, entonces tendremos que si lo sumas una vez, ahora tendrás 2 puntos de la recta (el primero que estaba como "solo" y el que calculaste), después si le sumas otra vez este vector obtienes otro punto de la recta. Al hacer esto lo que hacemos es tirar valores de λ, en estos casos 1, y después 2 (porque sumamos el vector 2 veces). El valor de λ puede ser cualquier valor real, con lo que tienes los puntos de la recta.

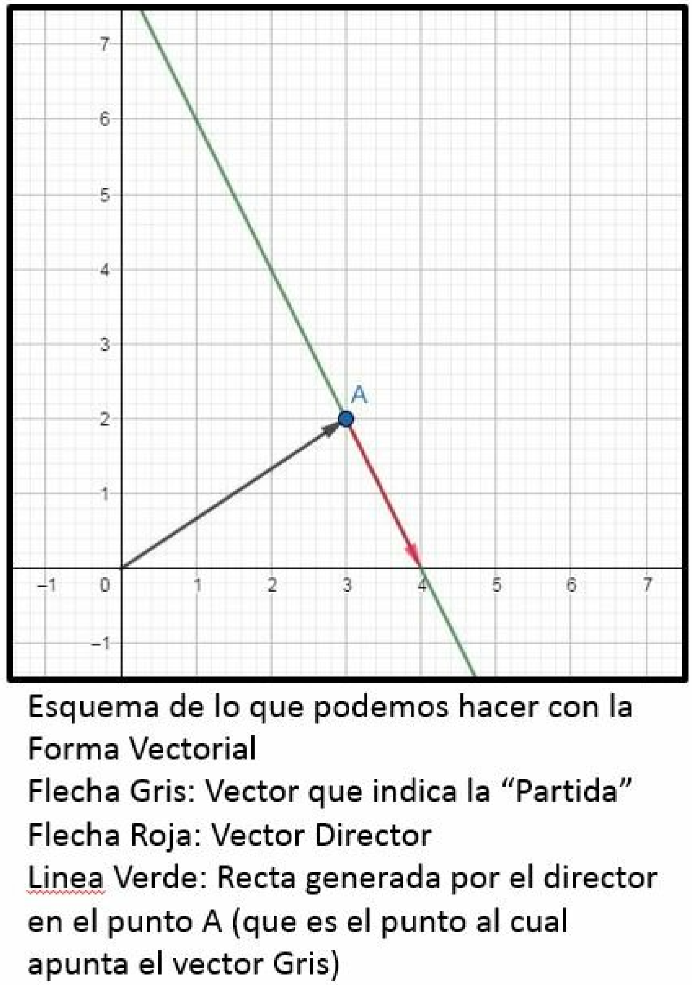


Figura 1: El vector directior (en rojo) puede alargarse o achicarse e ¡Incluso darse vuelta! Y al ver todas las posiciones finales del vector rojo, se genera la recta

Forma general de la recta en $\mathbb{R}^2$

La forma anterior de ver una recta es medianamente intuitiva, sin embargo, no nos dice mucha información respecto a la recta en sí como por ejemplo, donde corta a cada eje. Para obtener esta información más fácilmente, podemos hacer lo siguiente: Tratar de eliminar el λ algebraicamente, es decir, que solo con x e y tengamos la recta, ¿Como lograremos esto? Como prosigue (Las flechas en 2 sentidos significan que pase una cosa de un lado a otro, o que tal expresión "significa" lo otro):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda c \\ b + \lambda d \end{pmatrix} \iff x = a + \lambda c \text{ con } y = b + \lambda d \iff x - a = \lambda c \text{ con } y - b = \lambda d$$

Luego, debemos tener cuidado, ya que debemos dividir por c o por d, con lo que si son 0, tendremos problemas, haremos lo siguiente: veremos por caso:

- $c = 0$: Significa que no importa que y tome, el x siempre será a, ¿Esto como lo podemos ver? ¡Como una recta vertical! (Ya que el x será constante), entonces tendremos que la forma para la recta con $c = 0$ es $x = a$

- $d = 0$: Significa que no importa que valor tome x, el y siempre será b ¿Esto cómo lo podemos ver? ¡Como la recta horizontal! (Ya que el y es contante), entonces la formula que tendríamos es $y = b$

- $c \neq 0$ y $d \neq 0$: ¡Podemos dividir y continuar con lo anterior!

Ahora retomaremos, asumiendo que c y d son distintos de 0:

$\dfrac{x-a}{c} = \lambda$ con $\dfrac{y-b}{d} = \lambda$ Luego, tenemos que ambas cosas son iguales a λ, entonces podemos igualarlas

$$\frac{x-a}{c} = \frac{y-b}{d} \iff dx - ad = yc - bc \iff dx - yc - ad + bc = 0$$

Luego, diremos que $d = A$,$-c = B$ y $-ad + bc = C$, obteniendo una nueva forma de la recta:

$$Ax + By + C = 0$$

Esta fórmula después la podemos manipular un poco para llegar a algo como sigue (despejando el y):

$$Ax + By + C = 0 \iff Ax + C = -By \iff \frac{Ax + C}{-B} = y \iff \frac{-A}{B}x + \frac{-C}{B} = y$$

Si decimos que $\frac{-A}{B} = m$ y $\frac{-C}{B} = n$ entonces tenemos la fórmula de la forma $mx + n = y$, donde a m se le llama pendiente y a n coeficiente de posición. ¿De qué sirven? Pues que m te dice a que ritmo subiendo o bajando en el eje y la recta cuando avanzas en 1 en el eje x, y a n se le dice que es el coeficiente de posición, que es donde intersecta la recta al eje y. Otra forma de escribir una recta a partir de la forma general, pero que es menos usada, pero igualmente da buena información es como sigue: (Es básicamente "aislar" la constante que no tiene ni x ni y y después pasar dividiendo para que quede igualado a 1), eso sí, ojo porque sólo se puede usar cuando C no es 0:

$$Ax + By + C = 0 \iff Ax + By = -C \iff \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \iff \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

¿De que sirve escribir esta fórmula así? Que obtenemos las intersecciones de la recta con cada eje ordenado (Es cuando x es igual a lo que está debajo suyo y análogo con y), lo cual es bastante útil en ciertas ocasiones.

Paralelismo de rectas en $\mathbb{R}^2$

Según lo que dice el apunte, parece algo confuso ya que dice que es algo igual a otra cosa multiplicada por un número arbitrario. Quédense con la idea de que tu quieres comparar los vectores con que te desplazas en la recta, al compararlos, es posible darnos cuenta que se pueden igualar multiplicando por algún número.

La mejor forma de verlo es considerando que si conoces el vector director $(1, -1)$ (es decir, si se encuentra ponderado por 1, se mueve una unidad hacia la derecha y baja una para obtener el siguiente punto) que se encuentra en el origen, si queremos que pase lo mismo para el punto $(2, 5)$, es decir queremos formar una recta paralela a la original que pase por este punto, debemos utilizar o el mismo vector director o similar (con similar se refiere a multiplicarlo por algún número, como por ejemplo nos sirve $(-1, 1)$, $(2, -2)$, etc...)
Otra forma de ver el paralelismo es:

- **Forma Vectorial** Hagan la proporción entre cada componente del vector director, por ejemplo, si tienen $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ tendrán que en el primer vector la proporción es $\frac{8}{-4} = -2$ y en el segundo $\frac{2}{-1} = -2$, vemos que ambos vectores tienen igual proporción, por lo cual tendrán que son paralelos.

- **Forma General** Acá tienen que ver la división $\frac{B}{A}$, lo cual tambien pueden comprobar viendo el valor de la pendiente si la escriben de la forma $mx + n = y$, allí solo deben ver el valor de m. Si son los mismos, entonces son paralelas.

Perpendicularidad de rectas en $\mathbb{R}^2$

Como se vió en clases, 2 rectas son perpendiculares entre sí si forman un ángulo recto entre ellas. ¿Como poder decir si 2 rectas son perpendiculares o no? La respuesta a ésta pregunta puede ser encontrada en el producto punto, el cual es:

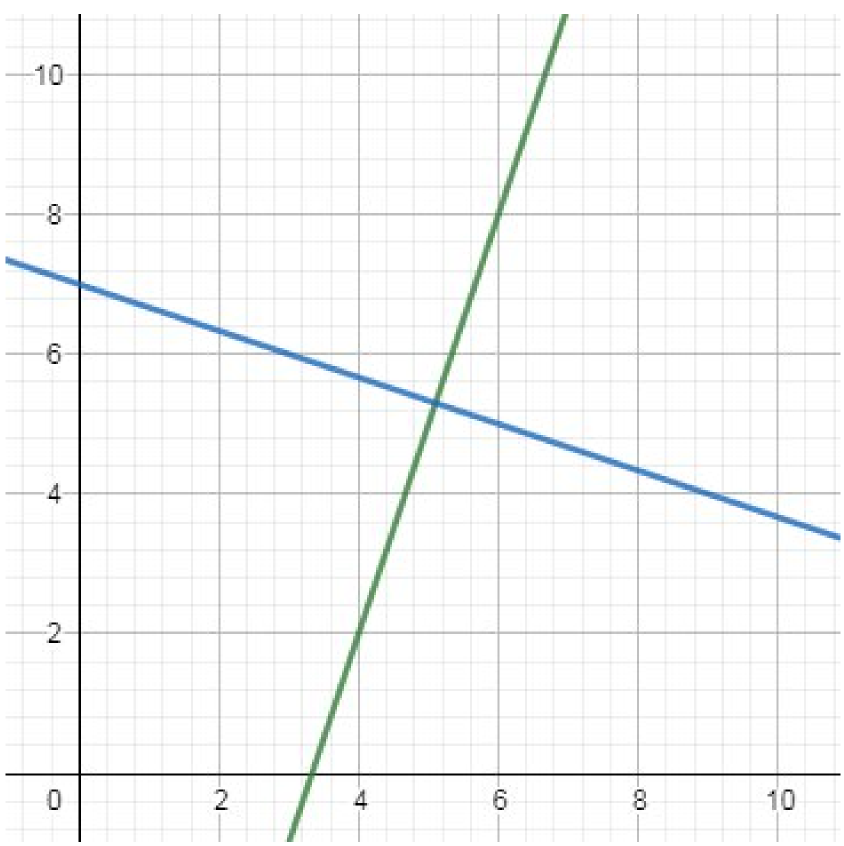
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

El producto punto entre 2 vectores en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ac + bd$$

Que es básicamente multiplicar cada componente por su análoga. ¿De qué me sirve saber esto? ¡¿Como se cumple?! ¡¿Entraré en la desesperación?! No D: Vayamos por partes, el producto punto sirve para saber si dos vectores son perpendiculares entre sí, ¿Cómo se cumple? Pues se usan unos teoremas de geometría que pasarán durante la enseñanza media. Y por último... ánimo!!! :D Tuvieron la iniciativa (a veces por voluntad propia, a veces obligados) de venir a clases de matemáticas en Enero, son realmente admirables :o Así que ánimo!!! :3
Volviendo al tema, podrán saber que 2 vectores son perpendiculares entre sí, si el producto punto (también llamado producto escalar) de sus vectores directores respectivos da 0.
Ahora bien, también tienen otra manera de obtener perpendicularidad, pero esta vez con la fórmula general. Si tienen 2 rectas L_1 y L_2 de la forma $mx + n = y$, entonces si:

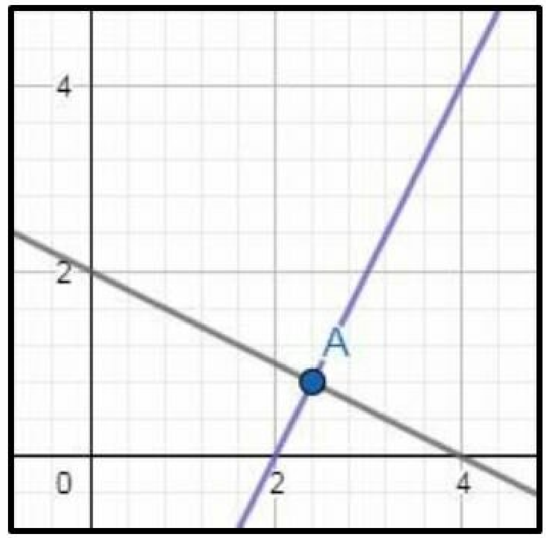
$$L_1 := m_1 x + n_1 = y \text{ y } L_2 := m_2 x + n_2 = y \text{ Son perpendiculares si } m_1 \cdot m_2 = -1$$



(a) 2 rectas perpendiculares entre sí

Intersección de Rectas en $\mathbb{R}^2$

¿Que querrán decir, estas extrañas personas del curso, cuando dicen intersectar? Si bien a veces usamos palabras extrañas para decir las cosas, muchas veces nos referimos a cosas simples, y este es el caso. Cuando hablamos de interseccion de rectas en $\mathbb{R}^2$, nos referimos a en que punto se tocan, chocan, se cruza, como se ve en la imagen de la derecha:



Ejemplo de intersección de 2 rectas, acá nombrado como "A"

Cuando tenemos 2 rectas, una cosa interesante que se suele hacer es ver cuando se "topan", ¿Cómo podemos calcular esto? Pues depende, acá mostraremos como se suele sacar forma vectorial y con forma general:

Forma vectorial:

Acá tenemos 2 rectas de forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Su intersección se obtiene igualando ambos x y ambos y, con lo cual llegas a un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas [INSERTE AL PIKACHU SORPRENDIDO AQUÍ], donde las incógnitas son λ_1 y λ_2:

$$a_1 + \lambda_1 c_1 = a_2 + \lambda_2 c_2$$
$$b_1 + \lambda_1 d_1 = b_2 + \lambda_2 d_2$$

Donde hay varias formas de resolver esto ~~Como por ejemplo con matrices~~, y así obtenemos el λ_1 y el λ_2, donde, después de reemplazar en sus respectivas fórmulas vectoriales, tendremos el punto de intersección.

Forma General:

Acá tendremos 2 fórmulas, una por cada recta en su forma general, de los cuales obtenemos 2 incógnitas, que son las coordenadas x e y, esto porque al meter el punto de intersección a la formula, nos cumple la igualdad, pero como ambas rectas pasan por el punto de intersección, tendremos que son el mismo x y el mismo y.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

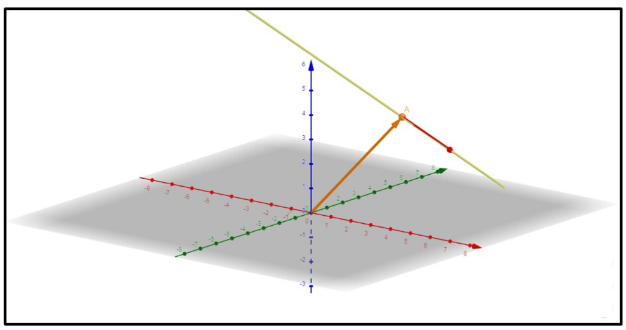
Para encontrar las soluciones a este sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas, tenemos varios métodos de resolución ~~Matrices~~

Rectas en $\mathbb{R}^3$

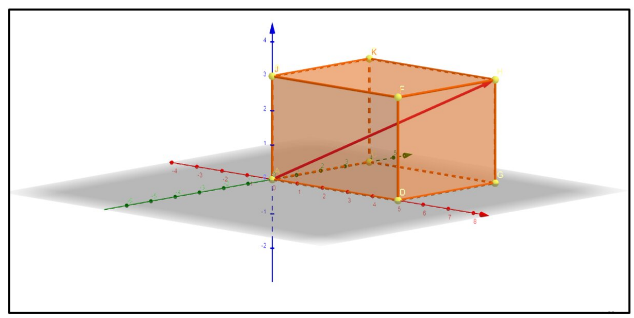
Enhorabuena! Has llegado hasta acá, lo que significa que probablemente ya leíste la parte anterior ~~o que solo te saltaste la hasta esta parte~~, sea como fuese, ahora vamos a mostrarles como son las rectas en $\mathbb{R}^3$. ¿Cómo las podemos ver? Como un hilo tenso en una habitación (aunque claro, se puede de varias maneras diferentes más). ¿Cómo podemos expresar esto matemáticamente? Es bastante parecido a como lo hacemos el $\mathbb{R}^2$

Forma Vectorial de la recta en $\mathbb{R}^3$

Conceptualmente es muy parecido a rectas en $\mathbb{R}^2$, solo que le agregamos una dimensión más, los puntos de la recta se escriben como $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde x es el largo, y es el ancho y z es la altura. Esto queda más claro si lo vemos como un paralelepípedo, que es como un cubo pero con sus lados no necesariamente iguales, como en la imagen a la derecha:



Vector Naranja: Vector que señala la "Posición Inicial".
Vector Rojo: Vector Director.
Línea Verde: Recta que se genera con estos 2.



Con esto como idea previa, podemos ver las rectas en $\mathbb{R}^3$ como los puntos en $\mathbb{R}^3$ que se forman al tener una ”posición inicial”, señalada con un vector (como en $\mathbb{R}^2$) al cual le sumamos un vector que podemos ponderar por cualquier valor real (como en $\mathbb{R}^2$), como resultado, nos queda una fórmula muy parecida a la de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

En ésta fórmula tiene los mismos significados que su análoga de $\mathbb{R}^2$, acá el vector del ”comienzo” es $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, y el vector director será $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, por su parte el λ puede representar cualquier valor real. La forma vectorial de los planos en $\mathbb{R}^3$ es muy similar a la forma vectorial de las rectas en $\mathbb{R}^3$, con la única diferencia de que los planos necesitan 2 vectores directores, no paralelos, para quedar bien definidos.to extra: Como tal, no existe una ”Forma general de la Recta en $\mathbb{R}^3$”, sin embargo, usando planos se puede obtener algo similar. (Que se mostrará después debidamente)

Paralelismo de rectas en $\mathbb{R}^3$

Es el mismo concepto que con rectas en $\mathbb{R}^2$ en forma vectorial, vale decir, tenemos que fijarnos en la proporción entre las 3 componentes de cada vector director, por ejemplo:

$$\text{Con } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y el vector } \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}. \text{ Analizando las proporciones que tienen, sería como:}$$

$$2:3:4 \text{ para el primero, y } 4:6:8 \text{ para el segundo}$$

Entonces tendremos que son paralelos, porque notemos que en el segundo caso, podemos simplificar por 2 la proporción, ya que todos son pares, obteniendo $2:3:8$, que es la misma proporción que tiene el primer vector. Entonces concluimos que ambos vectores son paralelos.

Nota IMPORTANTE AAAAAAAAAAAA: En $\mathbb{R}^3$ que 2 rectas sean paralelas significa que no se tocan, sin embargo al revés no necesariamente se cumple, pues se puede formar un esquema como el siguiente dibujo: A estas rectas se dice que son *alabeadas*

Perpendicularidad de Rectas en $\mathbb{R}^3$

Podemos definir el producto punto entre los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ como:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ y } \vec{y} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ad + be + cf$$

Luego, gracias a motivos geométricos que la mayoría de alumnos del curso no maneja, sabemos que si 2 vectores tienen producto punto 0, entonces éstos son perpendiculares. Luego, si los vectores directores de 2 rectas son perpendiculares, entonces estas son perpendiculares.

Dato: Este dato es inutil para el curso, sin embargo, se dice que 2 rectas son ortogonales si son perpendiculares y además se intersectan. Noten un truco con la definición de perpendicular: No dice nada sobre que se intersecten o no, corriendo el riesgo de que sean rectas alabeadas.