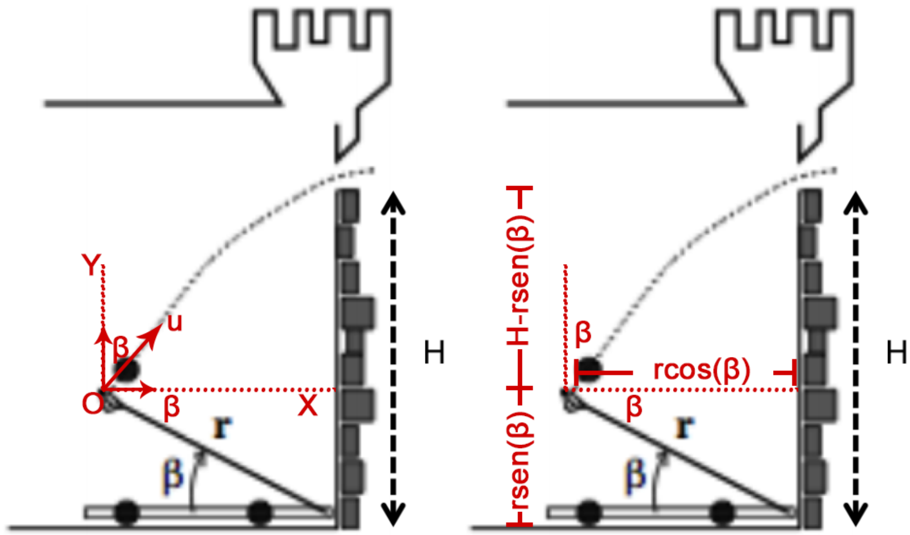
Para estudiantes de Educación Básica y Media.
UNIVERSIDAD DE CHILE

Física 1: Introducción a la Física Newtoniana.
Profesor: Claudio Falcón, Nelson Zamorano
Auxiliares: Pilar Guevara, Gaspar Gumucio, Sofía Huichulef, Sebastián Montenegro, Belén Muñoz, Benjamín Pérez, Martín Ríos.

Ejercicio 3

17 de Enero de 2018



(a) Sistema de referencia (b) Posiciones

Como la catapulta lanza desde el ángulo β el proyectil con rapidez u siguiendo una trayectoria circunferencial antes de llegar a este punto, podemos afirmar que éste sale en la dirección de un vector perpendicular al brazo de la catapulta cuyo módulo es la misma rapidez u. Ahora consideraremos el movimiento parabólico que tendrá el proyectil cuando sea lanzado, poniendo el origen de nuestro sistema de referencia justo en el borde del brazo cuando éste se posiciona en el ángulo *beta* tomando ejes X e Y positivos hacia la derecha y arriba respectivamente (ver figura (a)).

Como mencionamos, el cuerpo sale de la catapulta con una velocidad inicial representada por el vector $\vec{u}$ y que genera un ángulo β con el eje vertical. De acá se pueden obtener las componentes del vector en cada eje:

$$\text{Componente en X:}\ \ V_x = u \cdot \sin(\beta) \tag{1}$$

$$\text{Componente en Y:}\ \ V_y = u \cdot \cos(\beta) \tag{2}$$

Así mismo, podemos deducir las ecuaciones de movimiento en cada eje:

Ecuaciones de movimiento en X:

$$X_f = X_i + V_{ix} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} = u \cdot \sin(\beta) \cdot t \tag{3}$$

$$V_{fx} = V_{ix} + a_x \cdot t = u \cdot \sin(\beta) \cdot \tag{4}$$

Ecuaciones de movimiento en Y:

$$Y_f = Y_i + V_{iy} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} = u \cdot \cos(\beta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{5}$$

$$V_{fy} = V_{iy} + a_y \cdot t = u \cdot \cos(\beta) \cdot -g \cdot t \tag{6}$$

Para que la catapulta funcione de acuerdo al diseño se debe imponer que las posiciones finales de interés sean:

$$X_f = r \cdot \cos(\beta) \tag{7}$$

$$Y_f = H - r \cdot \sin(\beta) \tag{8}$$

Reemplazando la ecuación (7) en la (3) y despejando el tiempo, obtenemos la igualdad:

$$r \cdot \cos(\beta) = u \cdot \sin(\beta) \cdot t \implies t = \frac{r \cdot \cos(\beta)}{u \cdot \sin(\beta)} \tag{9}$$

Como queremos que en este instante también coincida la posición vertical, es decir, $Y_f = H - r \cdot \sin(\beta)$, reemplazamos este valor y el tiempo obtenido en la ecuacion (5):

$$H - r \cdot \sin(\beta) = u \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{r \cdot \cos(\beta)}{u \cdot \sin(\beta)} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{r \cdot \cos(\beta)}{u \cdot \sin(\beta)}\right)^2 = u \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{r \cdot \cos(\beta)}{u \cdot \sin(\beta)} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{r^2 \cdot \cos^2(\beta)}{u^2 \cdot \sin^2(\beta)} \tag{10}$$

Enviando todos los términos a la izquierda e igualando a cero nos queda la ecuación cuadrática:

$$H - r \cdot \sin(\beta) - u \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{r \cdot \cos(\beta)}{u \cdot \sin(\beta)} + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{r^2 \cdot \cos^2(\beta)}{u^2 \cdot \sin^2(\beta)} = 0 \tag{11}$$

$$\implies H + r \cdot \left(-\sin(\beta) - \cos(\beta) \cdot \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}\right) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{r^2 \cdot \cos^2(\beta)}{u^2 \cdot \sin^2(\beta)} = 0 \tag{12}$$

$$\implies H + r \cdot \left(-\frac{\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)}{\sin(\beta)}\right) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{r^2 \cdot \cos^2(\beta)}{u^2 \cdot \sin^2(\beta)} = 0 \tag{13}$$

$$\implies H + r \cdot \left(-\frac{1}{\sin(\beta)}\right) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{r^2 \cdot \cos^2(\beta)}{u^2 \cdot \sin^2(\beta)} = 0 \tag{14}$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{\frac{1}{\sin(\beta)} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\beta)} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{\cos^2(\beta)}{u^2 \cdot \sin^2(\beta)} \cdot H}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{\cos^2(\beta)}{u^2 \cdot \sin^2(\beta)}} \tag{15}$$

$$\implies r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2 \cdot g \cdot \frac{\cos^2(\beta)}{u^2} \cdot H}}{g \cdot \frac{\cos^2(\beta)}{u^2}} \tag{16}$$