FM1003-2 Matemática III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

P7 Auxiliar 12

24 de enero de 2018

P7.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = -xf(x),\ g'(x) = xg(x),\ f(0) = g(0) = 1$$

a) Pruebe que $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x)$, $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.

c) Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.

d) Demuestre que f es par.

e) Estudie el crecimiento de f'

Para resolver esto, trabajaremos pasito por pasito:
a) Para ver que $f \cdot g$ es constante, debemos comprobar que $f \cdot g = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, veamos entonces:

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' = -xf(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot xg(x) = 0$$

Con esto, comprobamos que como la derivada de $f \cdot g$ es cero en cualquier x, esa función es una constante! Ahora, de ese mismo modo, como conocemos la función cuando x=0, sabemos que valdrá lo mismo en cualquier otro punto ya que es constante! (o sea, $f(x) \cdot g(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$). Para concluir esta parte, sabemos que como tanto la función f como g son derivables, ellas deben ser continuas. (Porque derivable $\Rightarrow$ continua) y además, sabemos que no puede ser cero en ningún punto (ya que si eso pasara en un x_0, entonces $f(x_0) \cdot g(x_0) = 0$, pero sabemos que es constante e igual a uno. De ese modo, sabemos que es continua y no pasa por $y = 0$. También sabemos que en $x = 0$ tanto f como g valen uno, es decir, están sobre el eje OX, si se tiene eso y además no podemos cruzar por el eje OX, tendremos que la función es siempre positiva (esto es análogo para g)

b) El crecimiento nos lo entregará la derivada:

$$f'(x) = -xf(x)$$

Sabemos que $f(x) > 0$ entonces, la derivada dependerá del valor de x. Si $x > 0$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es **DECRECIENTE**
Si $x < 0$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es **CRECIENTE**
Si $x = 0$ $f'(x) = 0 \Rightarrow$ x es un **PUNTO CRÍTICO**
Pero sabemos que antes de $x = 0$ la función es decreciente y después es creciente, por lo tanto, se trata de un mínimo de la función!

c) Derivaremos la función $f'(x)$

$$f''(x) = (f'(x))' = (-xf(x))' = -1 \cdot f(x) + (-x) \cdot f'(x) = -f(x) - x \cdot (-xf(x))$$

$$= -f(x) + x^2 f(x) = (x^2 - 1)f(x)$$

De ese modo, si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ la función es **CONVEXA** en x_0
si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ la función es **CÓNCAVA** en x_0
Vemos entonces que entre el -1 y el 1 la función es cóncava y en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ la función es convexa.

d) Estudiemos la función $h(x) = f(x) - f(-x)$
$h'(x) = f'(x) + f'(-x) = -xf(x) + (-(-x))f(-x) = -xf(x) + xf(-x) = -x(f(x) - f(-x))$
Similarmente a la parte a, tenemos que $h(x)g(x)$ es constante $\forall x \in \mathbb{R}$. Pero $h(x)g(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ Lo que indica que $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ Es decir, la función es par.

e) Crecimiento de f': Para ello vemos los signos de la segunda derivada:

$$(-xf(x))' = -1 \cdot f(x) + (-x) \cdot f'(x)$$

$$= -f(x) - x(-x)(f(x)) = -f(x) + x^2 f(x) = (x^2 - 1)f(x)$$

Tal como vimos en la parte c), en el intervalo (-1,1) la función f' es creciente y en $(-\infty$,-1)$\cup(1, \infty)$ será decreciente.