FM1003-2 Matemática III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Solucion P3 Guia Funciones

18 de enero de 2018

Sol. Se tiene que para sacar el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - |x|}$$

entonces nos fijamos en el denominador:

$$x^2 - |x| = 0$$

luego, se tiene que en el **caso** $x \leq 0$, entonces $|x| = -x$:

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

luego, para que esto se anule se tiene que $x = -1$ o bien $x = 0$. Para el **caso**,$x > 0$ vamos a llegar a que:

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

entonces se indetermina en $x = 1$. Entonces el dominio seria: $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Ceros:
Los ceros de la función estan dados cuando $f(x) = 0$, entonces, se tiene que:

$$\frac{x}{x^2 - |x|} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Paridad:
Para estudiar paridad, estudiemos que pasa con $f(-x)$, entonces:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - |-x|}$$

$$= -\frac{x}{x^2 - |x|}$$

$$= -f(x)$$

por lo tanto, la función es impar.
Signos: Por la imparidad de la funcion, los signos seran contrarios para los intervalos simetricos (por ejemplo si en $(-1, 0)$ me da positiva entonces en $(0, 1)$ es negativa). Por lo tanto, nos podemos fijar en los $x > 0$, la funcion queda como:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$$

$$= \frac{x}{x(x-1)}$$
$$= \frac{1}{x-1} \quad (1)$$

Por lo cual, se puede deducir que $f(x) > 0$ si x está entre $(1, +\infty)$ y es $f(x) < 0$ si x está entre $(0, 1)$. Por la imparidad, se infiere que: $f(x) < 0$ si x está entre $(-\infty, -1)$ y es mayor a 0 si es que x está entre $(-1, 0)$.

Crecimiento: Como f es impar entonces, podemos estudiar el crecimiento de f en $\mathbb{R}^+$. Así, la función queda definida como en (1). Sean $x, y \in (0, 1)$ tales que: $x < y$. Entonces, se tiene que:

$$x - 1 > y - 1$$
$$\Leftrightarrow x - 1 > y - 1$$

pero esto es menor que 0 entonces, multiplicamos por (-1) para que quede positivo.

$$\Leftrightarrow 1 - x < 1 - y$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > \frac{1}{y-1}$$
$$\Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

por lo tanto la función decrece en $(0, 1)$ y por la imparidad tambien lo hace en $(-1, 0)$.
Ahora, si estamos en $(0, +\infty)$ sean $x, y \in Dom(f)$ tales que $x < y$, armando la función nos queda que:

$$x - 1 < y - 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > \frac{1}{y-1}$$
$$\Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

Por lo tanto la función también es decreciente en $(1, +\infty)$ y por la imparidad en $(-\infty, -1)$.