FM1003-2 Matemática III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Solucion P1 Guia Funciones

18 de enero de 2018

P1.- Sol. Para encontrar el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

basta fijarnos que la funcion es del tipo racional (fracción), lo cual vemos cuando el denominador se anula. Entonces imponemos la condición:

$$|x| + 1 = 0 \Rightarrow |x| = -1$$

lo cual, la ecuacion no tiene solucion (por que carece de sentido igualar un numero negativo a un numero positivo por tener modulo), entonces su dominio seria:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

para el recorrido, nos tenemos que poner en dos casos (por el modulo) y luego unir los conjuntos para sacar el recorrido total.

Caso $x > 0$: Se tiene que $|x| = x$ entonces, la funcion la escribimos como:

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

entonces igualamos a un y y despejamos la x:

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow y(x+1) = x$$

$$\Leftrightarrow yx + y = x$$

$$\Leftrightarrow y = x - yx$$

$$\Leftrightarrow y = x(1-y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \qquad (1)$$

En este caso, tenemos la restriccion: $x > 0$, de la cual tendremos el recorrido. Tenemos la inecuación

$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{y-1} < 0$$

entonces, los puntos criticos son $y = 0$ e $y = 1$, usamos la tabla:

	$(-\infty,-1)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y	-	+	+
$y-1$	-	-	+
$\dfrac{y}{y-1}$	+	-	+

Entonces su recorrido es: $(0,1)$

Caso $x<0$: Se tiene que $|x|=-x$, entonces igualamos a un y y despejamos x:

$$y=\frac{x}{-x+1}$$
$$\Leftrightarrow y(-x+1)=x$$
$$\Leftrightarrow -yx+y=x$$
$$\Leftrightarrow y=x+yx$$
$$\Leftrightarrow y=x(1+y)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}$$

Luego el conjunto imagen en este caso seria determinado por la inecuacion del caso en que nos impusimos, es decir, que $x<0$ Asi nos queda que:

$$\frac{y}{1+y}<0$$

cuyos puntos criticos son en $y=0$,$y=-1$ entonces:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
y	-	-	+
$y+1$	-	+	+
$\dfrac{y}{y+1}$	+	-	+

Entonces su recorrido es: $(-1,0)$

La unión de estos da como resultado que el conjunto imagen de la función original sea:

$$Im(f)=(-1,1)$$

Paridad: Como siempre estudiamos $f(-x)$, entonces:

$$f(-x)=\frac{-x}{|-x|+1}$$
$$=-\frac{x}{|x|+1}$$
$$=-f(x)$$

por lo tanto la funcion seria impar.

Signos y Ceros: Notemos que: $\forall x\in\mathbb{R}$ $|x|+1>0$ entonces, se tiene que el signo solo depende del x del numerador de la funcion por lo tanto, $f(x)>0$ si $x>0$ y $f(x)<0$ si

$x < 0$. Además, de aca se desprende que $f(x) = 0$ si y solo si $x = 0$.
Crecimiento: Estudiamos crecimiento, se tiene que la funcion $\frac{1}{x}$ decrece, luego notemos que si $x > 0$ entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{x}{x(1+\frac{1}{x})} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

como $\frac{1}{x}$ decrece, entonces $\frac{1}{1+1/x}$ crece. Por lo tanto la función es creciente. **Sobreyectividad:** Es facil ver que su recorrido no son todos los reales, lo cual la funcion no es sobreyectiva.
Inyectividad: La función es inyectiva, en efecto, podemos fijarnos en los numeros positivos solamente, sean $x, y \in Dom(f)$ tales que $f(x) = f(y)$ y $x > 0$ e $y > 0$ entonces:

$$f(y) = f(x) \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1}$$

$$x(y+1) = y(x+1)$$

$$xy + x = yx + y$$

$$x = y$$

por lo tanto f es inyectiva.
Biyectividad: Como f es inyectiva, entonces es sobreyectiva sobre su recorrido, lo cual es biyectiva sobre $(-1, 1)$. **Inversa:** Si restringimos al recorrido anterior, se tiene que la inversa esta dada por (1) y por (2). Dependiendo del caso, asi podemos generalizar el caso de los signos como

$$x = \frac{y}{1-|y|}$$

Entonces, la funcion inversa es:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$$