FM1003-2 Matematica III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano A.
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Solución P2 Guía

18 de enero de 2018

P2.- Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x}{1 - |x|}$$

a) Encuentre dominio, ceros y paridad de f.

b) Demuestre que $\forall y > 0$ existe $x \in (0,1)$ tal que $y = f(x)$, use este resultado para deducir que f restringida al dominio $(-1,1)$ es epiyectiva.

Resolución:
Para resolver esto, primero miremos qué números restringen el dominio. Como tenemos una fracción, lo que analizaremos serán **los casos en los que se indetermina el denominador**. Es fácil ver que eso será cuando $1 - |x| = 0$, esto es equivalente a decir que $1 = |x|$, los únicos números que hacen eso son 1 y -1. De este modo concluímos que $\underline{Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$.
Ahora, los ceros. Los ceros de una fracción se obtendrán cuando el **numerador sea igual a cero**, eso es equivalente a decir $2x = 0$, esa situación se da cuando $x = 0$. Llegamos así a que los ceros (o en este caso, el cero) que tiene la función f es precisamente, cero.
La paridad se obtiene analizando $f(-x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2 \cdot (-x)}{1 - |-x|} \\ &= \frac{-2x}{1 - |x|} \\ &= -\frac{2x}{1 - |x|} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Vemos que como llegamos a que $f(-x) = -f(x)$ la función f es impar.
Ahora veremos la parte b). Veamos que trabajando la inversa, tendremos algo como lo siguiente:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x}{1 - |x|} \\ (1 - |x|) \cdot y &= 2x \\ y - y|x| &= 2x \\ y &= 2x + y|x| \end{aligned}$$

Acá usaremos el dato de que el x que existe está en $(0,1)$.

$$\begin{aligned}
y &= 2x + yx \\
y &= x(2+y) \\
\frac{y}{2+y} &= x \\
\frac{y+(2-2)}{2+y} &= x \\
\frac{2+y-2}{2+y} &= x \\
1 - \frac{2}{2+y} &= x
\end{aligned}$$

Llegamos así a la inversa buscada. Fijémonos que podríamos llegar a cualquier "y" excepto (aparentemente) al -2 (además, es claro ver que la x está siempre en el intervalo (0,1) para cualquier $y \in \mathbb{R}^+$). Es de este modo que comprobamos justamente lo pedido! (Para todo $y > 0$, existe un x en (0,1) que hace que la función sea epiyectiva. Luego, como la función es impar, pasa lo mismo para todo $y < 0$ para algún x en (-1,0), uniendo ambos intervalos (y viendo que en 0 la función se comporta bien) llegamos a que la función es epiyectiva para el intervalo (-1,1) sobre todos los reales :).
Si les quedan dudas, nos avisan! Mucho éxito para mañana!