FM1003-2 Matemática III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Solucion P4 Guia Funciones

18 de enero de 2018

Sol. Se tiene que la funcion puede ser escrita como:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}}$$

pudiendo simplificarse a:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$$

Dominio: Para sacar el dominio imponemos que:

$$\frac{x-2}{x+1} \geq 0$$

y que:

$$x \neq -1$$

trabajamos la inecuacion con la tabla, se tiene que los ceros del numerador es el 2 entonces llenamos la tabla para resolver la inecuación:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x-2$	-	+	+
$x+1$	-	-	+
$\frac{x-2}{x+1}$	+	-	+

Entonces su dominio seria:

$$Dom(f) = (-\infty,-1) \cup [2,+\infty)$$

Ceros: Para sacar los ceros, se tiene que $f(x) = 0$ luego, obtenemos que:

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} = 0$$

esto se tiene si el numerador es cero, entonces en este caso:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

entonces tiene un cero en $x = 2$

Signos: Por ser una función raiz, se tiene que las raices son siempre positivas o cero, entonces $f(x) \geq 0$.

Crecimiento: Notemos que f no es par ni impar, entonces debemos ponernos en los casos de los dos intervalos del dominio de f.

Caso en el intervalo $[2, +\infty)$: Entonces, tomemos dos numeros x, y en el dominio tales que $x < y$, luego se tiene que:

$$x + 1 < y + 1$$

al elevar a -1 se da vuelta (#lodamosvuelta, #nadaesimposiblewnniunawea) todo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} &> \frac{1}{y+1} \; / \cdot (-3) \\
\Leftrightarrow -\frac{3}{x+1} &< -\frac{3}{y+1} \\
\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x+1} &< 1 - \frac{3}{y+1} \\
\Leftrightarrow \frac{(x+1) - 3}{x+1} &< \frac{(y+1) - 3}{y+1} \\
\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} &< \frac{y-2}{y+1} \\
\Leftrightarrow f(x) &< f(y)
\end{aligned}$$

entonces es creciente en el intervalo $[2, +\infty)$
como nunca se uso que los numeros estuvieron en ese intervalo, podemos concluir que tambien crece en $(-\infty, -1)$

Recorrido: Se tiene que

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} / ()^2 \\
y^2 &= \frac{x-2}{x+1} \\
\Leftrightarrow y^2(x+1) &= x - 2 \\
\Leftrightarrow y^2 x + y^2 &= x - 2 \\
\Leftrightarrow y^2 + 2 &= x - y^2 x \\
\Leftrightarrow y^2 + 2 &= x(1 - y^2) \\
\Leftrightarrow \frac{y^2 + 2}{1 - y^2} &= x
\end{aligned}$$

Así, imponemos que:

$$\begin{aligned}
1 - y^2 \neq 0 &\Rightarrow y^2 \neq 1 \\
&\Rightarrow y \neq \pm 1
\end{aligned}$$

pero como la raiz siempre es positiva, entonces el conjunto imagen seria

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$