FM1003-2 Matematica III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano A.
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Solución P3

11 de enero de 2018

P3.- Definimos para $n \geq 1,\ r \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k$$

a) Demuestre que:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

Indicación: Usar cambio de índice en S_n

b) Demuestre que:

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$$

c) Calcule S_n en el caso $r = 1$, hágalo sobre la definición de S_n

Lo primero será realizar la parte a). Para eso usaremos la indicación (esto es, usar cambio de índice)

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} kr^k \\
&= \sum_{k=1\to 0}^{n\to n-1} [(k)+1]r^{[(k)+1]} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kr^{k+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}}_{\text{queríamos esto!}} \\
&= \underbrace{r\sum_{k=0}^{n-1} kr^k}_{\text{le agregaremos el n-esímo término}} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= r \cdot \sum_{k=0}^{n-1} kr^k + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} + r \cdot \underbrace{(nr^n - nr^n)}_{\text{esto es } 0} \\
&= r \cdot (\sum_{k=0}^{n} (kr^k) - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}
\end{aligned}$$

Que era justamente lo que buscábamos! :)

Ahora desarrollaremos la parte b)! (que no es b factorial ah, jajajaja)

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}}_{\text{le sacamos una constante}}$$

$$S_n = rS_n - nr^{n+1} + \underbrace{r\sum_{k=0}^{n-1} r^{k}}_{\text{suma geométrica}}$$

$$(1-r)S_n = -nr^{n+1} + (r\frac{1-r^{(n-1)+1}}{1-r})$$

$$S_n = \frac{-nr^{n+1}(1-r) + r - r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

$$S_n = \frac{r - r^{n+1}(n+1) + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$$

Nuevamente, llegamos a lo que buscábamos!
Ahora, la parte c) es la más sencilla, para descansar finalmente: Si r=1, revisando la definición nos queda:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 1^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Si les queda cualquier duda, nos dicen! Un abrazo, suerte en el estudio!!