

## FM1003-2 Matemática III: Límites y Derivadas

Profesor: Sebastián Zamorano A.

Auxiliares: Matías Azócar &amp; Joaquín Cruz



Para estudiantes de Educación Básica y Media.

## Auxiliar 4

11 de enero de 2018

## Propiedades y Sumas Conocidas

- (Suma del 1)

$$\sum_{k=i}^j 1 = (j - i + 1)$$

- (Sacar la constante)

$$\text{Sea } \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=i}^j a_k = \lambda \sum_{k=i}^j a_k$$

- $\sum_{k=i}^j a_k + b_k = \sum_{k=i}^j a_k + \sum_{k=i}^j b_k$

- (Cambio de índice)

$$\sum_{k=i}^j a_k = \sum_{k=i+s}^{j+s} a_{k-s}$$

- Si se tiene un  $l$  entre  $i$  y  $j$

$$\sum_{k=i}^j a_k = \sum_{k=i}^l a_k + \sum_{k=l+1}^j a_k$$

- (Suma Telescópica)

$$\sum_{k=i}^j a_{k+1} - a_k = a_{j+1} - a_i$$

- (Suma de los primeros  $n$  números naturales)

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- (Suma Geométrica)

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

- (Suma de los primeros  $n^2$  naturales)

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- (Suma de los primeros  $n^3$  naturales)

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

P1.- Calcule las siguientes sumatorias

$$a) \sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$$

$$b) \sum_{k=1}^n 3(4^k + 2k^2) - 4k^3$$

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}}$$

$$d) \sum_{k=1}^n (k+1)^2 k!$$

$$e) \sum_{k=0}^n 2^k k$$

$$f) \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$g) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

$$h) \sum_{k=1}^n b_k - b_{k+2}$$

**P2.-** Considere, para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$$

**Indicación:** Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

**P3.-** Definimos para  $n \geq 1$ ,  $r \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^n kr^k$$

a) Demuestre que:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

**Indicación:** Usar cambio de índice en  $S_n$

b) Demuestre que:

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$$

c) Calcule  $S_n$  en el caso  $r = 1$ , hágalo sobre la definición de  $S_n$

### Propuestos

**P4.-** Se pide calcular en función de n, el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

procediendo como se indica:

- (1) Escriba la suma de los números pares usando  $k = 2i$ , con  $i = \{1, 2, \dots, n\}$
- (2) Escriba la suma de los números impares usando  $k = 2i - 1$  con  $i = \{1, 2, \dots, n\}$

Calcule la suma pedida al inicio.