FM1003-2 Matematica III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano A.
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Resolución P1.- c)

Vamos a resolver la parte c) de la P1. Para eso, haremos uso tanto de fracciones parciales como de la suma telescópica.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+k\sqrt{k+1}}$$

Trabajaremos el término dentro de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+k\sqrt{k+1}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{k}(k+1)-k\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}(k+1)-k\sqrt{k+1}}}_{\text{multiplicamos para racionalizar}} &= \frac{\sqrt{k}(k+1)-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)^2-(k+1)^2k} \\
&= \frac{\sqrt{k}(k+1)-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)\underbrace{[(k+1)-k]}_{\text{esto es 1}}} \\
&= \frac{\sqrt{k}(k+1)-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

Es en este punto donde usamos fracciones parciales.
(También podrían haber separado la resta que teníamos aquí. Sin embargo, creo que les sería útil tener el proceso que entrega las fracciones parciales).
Como tenemos un producto de cosas en el denominador, usaremos fracciones parciales. Hemos de hallar un par que tengan la forma siguiente:

$$\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}=\frac{A(k+1)+B(k)}{k(k+1)}=\frac{\sqrt{k}(k+1)-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$$

Como queremos que el par de fracciones con A y B sean iguales a la fracción de la derecha, buscaremos A y B tales que la segunda fracción sea igual a la derecha.
(Por si se marearon, el hecho es que queremos transformar esa fracción grande en dos fracciones trabajables que ojalá resulten en términos útiles para una suma telescópica)
Es así que mirando y siendo un poco pillo, no es tan complicado ver que $A=\sqrt{k}$ y $B=-\sqrt{k+1}$ son valores que nos resultan útiles.
Es así que llegamos a que

$$\frac{\sqrt{k}}{k}+\frac{-\sqrt{k+1}}{k+1}=\frac{\sqrt{k}(k+1)-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$$

Hemos logrado así, transformar nuestro enunciado inicial, en el siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\sqrt{k}}{k}}_{\text{Término antecesor}} - \underbrace{\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}}_{\text{Término sucesor}}$$

Esta es una suma telescópica! Reconocemos inmediatamente el término antecesor y el sucesor! Entonces, solo nos queda reemplazar el índice superior "n" en el término sucesor y el índice inferior "1" en el término antecesor. Resultando:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1} = \frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$