FM1003-2 Matematica III: Límites y Derivadas
Profesor: Sebastián Zamorano A.
Auxiliares: Matías Azócar & Joaquín Cruz

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Solución P5

10 de enero de 2018

P5.- Sean A,B y C conjuntos tal que $C = (A \cup B)^c$ con A, B cualquiera, demuestre:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

Respuesta

Para demostrar lo anterior, haremos uso de la siguiente propiedad:

$$A \triangle X = A \triangle Y \Rightarrow X = Y$$

La demostración es la siguiente, supondremos que el paso de la izquierda es válido y trabajaremos para llegar al lado derecho:

$$\begin{aligned} A \triangle X &= A \triangle Y \\ A \triangle (A \triangle X) &= A \triangle (A \triangle Y) \\ (A \triangle A) \triangle X &= (A \triangle A) \triangle Y \\ \phi \triangle X &= \phi \triangle Y \\ X &= Y \end{aligned}$$

Ahora que sabemos esto, podemos usar esta propiedad para probar la P5 (también pueden usarla en el control si es que les preguntan por diferencia simétrica "$\triangle$") y recuerden que la diferencia simétrica conmuta!

$$\begin{aligned} (A \triangle B) \triangle C &= A \cup B \cup C \\ C \triangle (A \triangle B) &= A \cup B \cup C \\ C \triangle (C \triangle (A \triangle B)) &= C \triangle (A \cup B \cup C) \\ (C \triangle C) \triangle (A \triangle B) &= C \triangle (A \cup B \cup C) \\ \phi \triangle (A \triangle B) &= C \triangle (A \cup B \cup C) \\ A \triangle B &= (A \cup B \cup C) \triangle C \\ A \triangle B &= ((A \cup B \cup C) \cup \underbrace{C}_{\subseteq A \cup B \cup C}) \setminus (\underbrace{(A \cup B \cup C)}_{\subseteq C} \cap C) \\ A \triangle B &= (A \cup B \cup C) \setminus C \\ A \triangle B &= (A \cup B \cup C) \cap C^c \\ A \triangle B &= ((A \cup B) \cap C^c) \cup \underbrace{(C \cap C^c)}_{\phi} \\ A \triangle B &= (A \cup B) \setminus C \\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \setminus (A \cup B)^c \\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \end{aligned}$$

De aquí es fácil concluir que $A \cap B = \phi$, ya que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B$ (de la única forma que esto se cumple, es que $A \cap B = \phi$ ya que así no le quito nada a $A \cup B$)