FM1002 Fundamentos del Álgebra abstracta
Profesores: Sebastián Tapia, Sebastián Reyes Riffo, Leslie Jiménez
Auxiliares: Nicolás Cornejo, Camilo Carvajal, Jordan Urra, Pablo Araya, Bruno Moreno, Ignacio Fierro

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Guía 7

P1.- * Sea $\mathcal{A}$ un conjunto formado por siete bolas numeradas del 1 al 7 y tales que las bolas 1,2,3 son rojas, la 4 y 5 azules, y la 6 y 7 verdes. Se considera en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida como:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{x e y tienen el mismo color.}$$

Determine las clases de equivalencias y el conjunto cuociente.

P2.- ** Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$. Se define la relación $\mathcal{S}$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ como:

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x \equiv_2 y$$

a) Determine las clases de equivalencia $[0]_{\mathcal{S}}$ y $[1]_{\mathcal{S}}$.
b) A partir de lo anterior deduzca el conjunto cuociente de $\mathcal{S}$.

P3.- * Resuelva los siguientes problemas utilizando congruencia de módulo:

a) Si hoy es lunes ¿qué día será en 1678 días más?
b) Un reloj marca las 3:00 hrs ¿qué hora será en 165 horas más?
c) Supongamos que son las $16:00$ horas ¿qué hora serán dentro de 2018 horas? y ¿Qué hora fue hace 2018 horas?

P4.- * ¿Cual es el resto de dividir $37^4 + 49(801) + 120$ por 5?

P5.- * Encuentre el ultimo digito de las siguientes potencias:

a) 6^{20}
b) 7^{93}
c) 23^{189}

P6.- ** ¿Qué valor o valores puede tener x para que se cumpla que $5x \equiv_3 2$?.

P7.- *** Probar que en cualquier colección de 7 o más números naturales siempre hay dos cuya suma o diferencia es divisible entre 11.

P8.- ***

Teorema 1 (Pequeño teorema de Fermat)**.** *Si p es un número primo, entonces para cada $a > 0$ natural se tiene:*

$$a^p \equiv_p a$$

Si además a y p son coprimos entre si, se tiene que:

$$a^{p-1} \equiv_p 1$$

Usando el pequeño teorema de Fermat demuestre que:

a) $3^{587} - 3$ es divisible por 587

b) $n \mid (2^n - 2)$ para todo n impar

c) Si p es un primo mayor que 5, entonces $p^4 - 1$ es divisible por 240