FM1002 Fundamentos del Álgebra abstracta
Profesores: Sebastián Tapia, Sebastián Reyes Riffo, Leslie Jiménez
Auxiliares: Nicolás Cornejo, Camilo Carvajal, Jordan Urra, Pablo Araya, Bruno Moreno, Ignacio Fierro

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Guía 4

P1.- Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo.

a) Sea $B \subseteq \mathcal{U}$. Pruebe que:

$$[(\forall A \subseteq \mathcal{U})(A \cup B) = A)] \Rightarrow (B = \emptyset)$$

.

b) Demuestre que $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^c \subseteq A^c)$.

c) Para A, B, C conjuntos no vacíos. Demuestre que si $(A \cap B) \subseteq C$ entonces $(A \cap C^c) \subseteq B^c$

d) Sean $A, B, C, D \subseteq \mathcal{U}$ tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$. Demuestre que:

$$(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$$

P2.- Sea U el conjunto universo, que contiene a A, B y C. Demuestre que:

a) $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = U$

b) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A$

c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

d) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

P3.- Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ y sea $M = \{X \subseteq \mathcal{U} : (A \cap X) = \emptyset\}$.

a) Probar que:

 I) $\emptyset \in M$ y $A^c \in M$.

 II) $(A \in M) \Leftrightarrow (A = \emptyset)$.

b) Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{1, 4\}$. Encuentre el conjunto M mediante su definición.

P4.- Sean A, B, C conjuntos arbitrarios. Responda las siguientes preguntas:

a) Si $A \cup B = A \cup C$, ¿Es necesario que $B = C$?

b) Si $A \cap B = A \cap C$, ¿Es necesario que $B = C$?

c) Si $A \Delta B = A \Delta C$, ¿Es necesario que $B = C$?

P5.- Sean $A, B, C \in E$ conjuntos. Probar las siguientes igualdades:

a) $A \triangle \emptyset = A$

b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

c) $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$

P6.- Considere A y B dos conjuntos no vacios. Demuestre que:

a) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B^c = B^c$

c) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$

P7.- Sean A, B, C conjuntos arbitrarios. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas y justifíquelas brevemente:

a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$. Entonces $A \in C$

b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$. Entonces $A \subseteq C$

c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$. Entonces $A \in C$

d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$. Entonces $A \subseteq C$

P8.- [Paradoja de Russell]

Es conocido que un conjunto puede contener conjuntos. Supongamos que un conjunto puede contenerse a sí mismo, como por ejemplo, consideremos L el conjuntos de las cosas que no son libros, como L no es libro, entonces $L \in L$.

Consideremos el conjunto C que contiene todos los conjuntos que no se contienen a sí mismo, por ejemplo $L \notin C$. Es decir, se define C como

$$C = \{A : A \notin A\}$$

Como C es un conjunto. ¿Se tiene que $C \in C$?