FM1002 Fundamentos del Álgebra abstracta
Profesores: Sebastián Tapia, Sebastián Reyes Riffo, Leslie Jiménez
Auxiliares: Nicolás Cornejo, Camilo Carvajal, Jordan Urra, Pablo Araya, Bruno Moreno, Ignacio Fierro

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Guía 3

P1.- Negar las siguientes proposiciones y estudie, si es posible, el valor de verdad de la proposición corroborando que la proposición negada tenga el valor de verdad opuesto a la proposición original.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$

d) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : [(x + y) \text{ es par} \Rightarrow (x \text{ es par} \wedge\ y \text{ es par})]$

e) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x < y \wedge x^2 \geq y)$

P2.- Sea $r(x)$ y $s(x)$ dos funciones proposicionales. Considere las siguientes proposiciones:

$$p : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x \geq y$$
$$q : (\forall x)[r(x) \Rightarrow \exists y :\ s(y)]$$

a) ¿Es p verdadero o falso?

b) Niegue p

c) Niegue q

P3.- Considere las funciones proposicionales:

$$\begin{aligned} p(x,y) &: \quad x - y > 1 \\ q(x,y) &: \quad 2x + 3y < 2 \end{aligned}$$

Así como los conjuntos $A = \{2, 1, -1, 3\}$, $B = \{-4, 1, -1/2\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in B, \exists y \in B : q(x,y)$

b) $\exists x \in A, \forall y \in B : p(x,y) \Rightarrow q(x,y)$

c) $\forall x \in A, \exists y \in B : p(x,y) \wedge q(x,y)$

P4.- Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones cuantificadas:

a) $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x \leq y)$

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x \leq y)$

c) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{N})(n(x^2 - mx) \leq 0)$

P5.- Sea S un conjunto de números reales. Se dice que x es punto aislado de S si existe un número real d estrictamente positivo tal que para todo $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que d.

(a) Escriba la definición de punto aislado usando cuantificadores.

(b) Demuestre que si $x \in S$ entonces x no es punto aislado de S.

(c) Sea $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\}$. Probar que el origen no es punto aislado de S.

P6.- Sea $p(x, y)$ una proposición abierta dependiente de x e y. Considere la siguiente proposición lógica:

$$(\exists x)(\forall y)p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x, y)$$

Justifique la veracidad de ésta. Indique un caso particular de proposición abierta $p(x, y)$ que haga falsa la proposición recíproca, es decir:

$$(\forall y)(\exists x)p(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)p(x, y)$$

P7.- Sea p una propoción lógica y $q(x)$ una función proposicional:

a) Si llamamos r a la proposición $(\forall x)(p \Rightarrow q(x))$, determine el valor de verdad de p sabiendo que r es falsa. Justifique.

b) Llamemos ahora s a la proposición $(\exists x)(p \Rightarrow q(x))$. Decida si es posible determinar el valor de verdad de p sabiendo que s es verdadera. Justifique.

P8.- Negar la definición de existencia y unicidad:

$$(\exists! x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)]$$

P9.- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta:

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

b) $\emptyset \in \emptyset$

c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

e) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

f) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

h) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

i) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

k) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

l) $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}\}$

m) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

n) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$