FM1002 Fundamentos del Álgebra abstracta
Profesores: Sebastián Tapia, Sebastián Reyes Riffo, Leslie Jiménez
Auxiliares: Nicolás Cornejo, Camilo Carvajal, Jordan Urra, Pablo Araya, Bruno Moreno, Ignacio Fierro

Para estudiantes de Educación Básica y Media.

Guía 2

P1. Sean p, q y r proposiciones, demostrar que las siguientes proposiciones son tautologías.

(a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

(b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$

(c) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

(d) $[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(e) $\overline{(p \Leftrightarrow q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow q)$

P2. Pruebe que las siguientes proposiciones son tautologías:

1. $[p \Leftrightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$
3. $[(p \vee r) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
4. $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

P3. Determine si las siguientes proposiciones son tautologías:

1. $p \Rightarrow (p \vee q)$
2. $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee \overline{q})$
3. $p \Rightarrow (p \wedge q)$
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

P4. Demuestre, utilizando el método de contradicción, que las siguientes proposiciones son tautologías:

(a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

(b) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

(c) $[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$

P5. Indique en cuál de los siguientes casos p es condición necesaria y suficiente para q, es decir, $p \Leftrightarrow q$.

p	q
n es múltiplo de 4	n es número par.
n y m son número pares	$n + m$ es un número par
n^2 es par	n es par

P6. Demuestre por contradicción que si los 123 residentes de un edificio tienen edades que suman 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años.

P7. Demuestre por contradicción que $3x - 1$ es par entonces x es impar.

P8. Demuestre por contradicción que si $n = ab$ donde ambos a y b son enteros positivos, entonces $a \leqslant \sqrt{n}$ o $b \leqslant \sqrt{n}$