MA3801-1: Análisis
Profesores: Juan Davila y Manuel del Pino
Auxiliares: Guillaume Grelier y Pierre Vandaële

Razonar y redactar

14 de marzo de 2017

1. Inclusión

Para mostrar que $F \subset E$:

Sea $x \in F$
Etapas de demostración... $x \in E$
Entonces $F \subset E$

Igualdad de conjuntos : Doble inclusión o razonar por equivalencia.

2. Probar una proposición

Para mostrar que "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$", se escribe :

Sea $x \in E$ *(uno declara las variables usadas)*
Etapas de demostración... $\mathcal{P}(x)$
Entonces : $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$

Ejemplo : Mostrar que toda sucesión convergente de $\mathbb{R}$ es acotada.

3. Probar la existencia

Para mostrar que "$\exists x \in E\ :\ \mathcal{P}(x)$":

Δ Si uno sabe quien verifica $\mathcal{P}$:

Sea $x =$**mi idea**
Etapas de demostración... $\mathcal{P}(x)$
Entonces : $\exists x \in E\ :\ \mathcal{P}(x)$

Ejemplo : probar que existe una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f' = f$.

Δ Reformular el problema para usar un teorema de existencia conocido (Zorn, teorema del punto fijo, teorema del valor medio, intermedio, existencia de ínfimo y supremo, argumento de compacidad...)

Ejemplos :

- Sean $a < b$ reales y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)f(b) < 0$, mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. (usando ínfimo)

- Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua tal que existe $l \in [0,1)$ tal que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.
  Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(\alpha) = \alpha$. (usando el Teorema del valor intermedio)
- Existencia de una base de Hamel en cualquier espacio vectorial. (usando Zorn)

Δ Otras formas.

4. Disyunción

Consideramos proposiciones P y Q.

Probar que "P o Q" es equivalente a probar que "$no(P) \Longrightarrow Q$":

Suponemos $no(P)$, vamos a demostrar Q
Etapas de demostración... Q
Entonces : P o Q.

Ejemplo : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{máx}(x^2, (x-2)^2) \geqslant 1$

5. Contradicción

Queremos probar P, suponemos $no(P)$ y buscamos cómo llegar a una contradicción (con un teorema, un axioma...)

Suponemos $no(P)$
Etapas de demostración
Contradicción
Entonces P.

Ejemplo : $\sqrt{2}$ es irracional.

6. Implicación

Para mostrar que "$P \Longrightarrow Q$ ":

Δ De manera directa :

Suponemos P, vamos a demostrar Q.
Etapas de demostración... Q
Entonces : $P \Longrightarrow Q$

Δ La contra-reciproca : "$P \Longrightarrow Q$" es equivalente a "$no(Q) \Longrightarrow no(P)$".

Suponemos $no(Q)$, vamos a mostrar $no(P)$.
Etapas de demostración... $no(P)$
Entonces : $P \Longrightarrow Q$

Ejemplo : Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$.

Probar que : $\Big(\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)\Big) \Longrightarrow$ (f es continua en a)

Negación : "$no(P \implies Q)$" y "P y $no(Q)$" son equivalentes. *(para usar el razonamiento por contradicción)*

En particular la negación de "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{D}(x)$" es "$\exists x \in E : \mathcal{P}(x)$ y $no(\mathcal{D}(x))$".

Equivalencia : Para mostrar que "$P \iff Q$", o se muestran las dos implicaciones o se razona por equivalencia (pero **ojo** que cada etapa sea claramente equivalente a la etapa anterior).

7. Unicidad

Para mostrar que el conjunto E tiene a lo más un elemento con la propiedad $\mathcal{P}$:

Sean $x, x' \in E$ tales que $\mathcal{P}(x)$ y $\mathcal{P}(x')$

Etapas de demostración... $x = x'$

Entonces E tiene a lo mas un elemento con la propiedad $\mathcal{P}$.

Ejemplo : $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f' = f$ y $f(0) = 1\}$ tiene un único elemento.

8. Análisis-síntesis

Razonar por análisis-síntesis sirve para buscar el conjunto de soluciones para un problema dado, de manera muy rigurosa.

Determinar quien son los elementos de $A = \{x \in E\ :\ \mathcal{P}(x)\}$:

Análisis (investigación) $\implies$: *(Qué forma puede tener tal $x \in A$?)*

Suponemos que existe $x \in E$ tal que $\mathcal{P}(x)$.

Etapas

Entonces $x \in A'$ *(la forma que encontraron).*

Síntesis (selección) $\impliedby$: *(Cuales elementos de A' son soluciones ?)*

Sea $x \in A'$, se tiene $\mathcal{P}(x)$? :

Etapas de demostración

Entonces si ...*(condiciones)*... se tiene $\mathcal{P}(x)$.

Por lo tanto : $A = ...$

Ejemplo : Para toda función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existen $P, I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respectivamente par y impar tal que $F = P + I$ y la descomposición es única.

Podemos usar análisis-síntesis para probar proposiciones del tipo "$\exists! x \in E\ :\ \mathcal{P}(x)$"
(análisis=unicidad, síntesis=existencia)

9. Inducción

Para probar que "$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$" :

Vamos a probar por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ la propiedad $\mathcal{P}_n$.

Base : **demostración...** entonces se tiene $\mathcal{P}_1$.
Paso inductivo : sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}_n$.
Demostración... $\mathcal{P}_{n+1}$. *(se debe usar el paso inductivo)*
Entonces : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$

Ejemplo : Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que $u_0 \geqslant 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n u_0$.