

Aux 3)

P1) $A = \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$, $B = \{2, 3, 5, 7\} \subset \mathbb{Z}$

a) $\begin{cases} (A \cup B) = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\} \\ (A \cap B^c) = \{0, 1\} \end{cases} \quad (A \cup B) \cap (A \cap B^c) = \{0, 1\}$

b) $A \setminus B = A \cap B^c = \{0, 1\}$

c) $B \setminus A = B \cap A^c = \{5, 7\}$

d) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 1, 5, 7\}$

P2) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3, 5, 7\}$

a) Para todas

b) Para todas, excepto aquellas en que $y=0$, es decir, pares $(x, 0)$ con $x \in B$

c) Para todas, excepto aquellos en que $y=7$

P3) a) $U \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow U \subseteq U \wedge U \cap A \neq \emptyset$

se cumple ✓

$A \neq \emptyset$

se tiene por hipótesis ✓

$A \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow A \subseteq U \wedge A \cap A \neq \emptyset$

se tiene ✓

hipótesis ✓

b) $A \setminus B \neq \emptyset \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$

Asumiremos la hipótesis verdadera, queremos ver si:

$B^c \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow B^c \subseteq U \wedge B^c \cap A \neq \emptyset$ es verdadera

* $B^c \subseteq U$ se tiene, ya que $B \subseteq U$ ✓

* $B^c \cap A \Leftrightarrow A \setminus B \neq \emptyset$ se tiene por la hipótesis asumida ✓

$$c) B \in \mathcal{F}_A \wedge C \subseteq U \Rightarrow (B \cup C) \in \mathcal{F}_A$$

* Asumiremos hipótesis verdadera, queremos llegar a $(B \cup C) \in \mathcal{F}_A$

$$\rightarrow (B \cup C) \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow (B \cup C) \subseteq U \quad \vee \quad (B \cup C) \cap A \neq \emptyset$$

* $(B \cup C) \subseteq U$ es directo, ya que $B \subseteq U$ y $C \subseteq U$

* $(B \cup C) \cap A \Leftrightarrow (B \cap A) \cup (C \cap A)$ y esto es distinto de $\emptyset$ ya que $B \in \mathcal{F}_A \rightarrow (B \cap A) \neq \emptyset$

$$P4) \underbrace{[\forall B \in (P(U) \setminus \{\emptyset\}) : A \subseteq B]}_{\text{lo puedo traducir como } [\forall B \subseteq U, B \neq \emptyset : A \subseteq B]} \Rightarrow A = \emptyset$$

Lo puedo traducir como $[\forall B \subseteq U, B \neq \emptyset : A \subseteq B] \Rightarrow A = \emptyset$

Sea un B cualquiera, $B \subseteq U$, $B \neq \emptyset$, tenemos que $A \subseteq B$

Pero también, por la definición, $B^c \subseteq U$, $B^c \neq \emptyset$, por lo tanto $A \subseteq B^c$

Tenemos entonces que $A \subseteq B \wedge A \subseteq B^c \rightarrow A \subseteq (B \cap B^c) \Leftrightarrow A \subseteq \emptyset$

Como sabemos que $\emptyset \subseteq A \Rightarrow A = \emptyset$

$$PS) a) \sum_{j=1}^n j(j+1) = \sum_{i=1}^n i^2 + i$$

$$b) \sum_{j=1}^n (2j+1)$$

$$c) \sum_{j=1}^n (-1)^j i$$

P6) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$

Usando lógica: Sean $X \in (P(A) \cup P(B)) \Leftrightarrow X \in P(A) \vee X \in P(B) \Leftrightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$

Pero esto es equivalente a $X \in P(A \cup B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cup B$

$$\therefore X \subseteq A \cup B \Leftrightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$$

* Lo que nos interesa aquí es la implicancia $X \subseteq A \cup B \Rightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$

De aquí podemos decir $A \cup B \subseteq A \vee A \cup B \subseteq B$

y de aquí concluimos $B \subseteq A \vee A \subseteq B$

P7)

$$\underbrace{A \cup B \in \mathcal{P}(C \cap D)} \Rightarrow A \in \mathcal{P}(C) \wedge B \in \mathcal{P}(C)$$

$$\Leftrightarrow A \cup B \subseteq C \cap D$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A \cup B \subseteq C} \wedge A \cup B \subseteq D$$

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(C) \wedge B \in \mathcal{P}(C)$$