FM1003-2 Matemática III: Límites y Derivadas
Profesor: Emilio Vilches G.
Auxiliares: Sebastián López y Matías Azócar

Auxiliar 3: Conjuntos y sumatorias

10 de enero de 2017

P1. Considere los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$ y $B = \{2, 3, 5, 7\} \subset \mathbb{Z}$. Calcule

a) $(A \cup B) \cap (A \cap B^c)$.
b) $A \setminus B$.
c) $B \setminus A$.
d) $A \triangle B$.

P2. Considere los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

a) ¿Para qué pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ la expresión $\frac{x}{y}$ está bien definida?
b) ¿Para qué pares ordenados $(x, y) \in B \times A$ la expresión $\frac{x}{y}$ está bien definida?
c) ¿Para qué pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ la expresión $\frac{x+7}{y-7}$ está bien definida?

P3. Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$, $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$ por

$$X \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow X \subseteq \mathcal{U} \wedge X \cap A \neq \emptyset$$

Demuestre que ,

a) $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_A$ y $A \in \mathcal{F}_A$.
b) Si $A \setminus B \neq \emptyset$ entonces $B^c \in \mathcal{F}_A$.
c) Si $B \in \mathcal{F}_A$ y $C \subseteq \mathcal{U}$ entonces $(B \cup C) \in \mathcal{F}_A$.

P4. Suponga que el conjunto universo $\mathcal{U}$ tiene al menos dos elementos diferentes. Sea $A \subset \mathcal{U}$. Demuestre que:

$$[\forall B \in (\mathcal{P}(\mathcal{U}) \setminus \emptyset) : A \subseteq B] \Rightarrow A = \emptyset$$

P5. Exprese usando la notación de sumatorias:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots$ (n veces).
b) $3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$ (n veces).
c) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 \cdots$ (n veces).

Propuestos

P6. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demuestre que:

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$$

P7. Sean $A, B, C, D \subset \mathcal{U}$. Demuestre que:

$$A \cup B \in \mathcal{P}(C \cap D) \Rightarrow A \in \mathcal{P}(C) \wedge B \in \mathcal{P}(C).$$

P8. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ considere la suma

$$S_n = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \cdots + \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}.$$

Escriba S_n como una sumatoria doble y calcule su valor.