

PSJ

Aux #13

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$$

a) Analice continuidad, Reperando donde corresponda

Respuesta: veamos su dominio

¿Cuándo $\ln(x^2) = 0$?

$$\ln(x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^0 = x^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$\text{ó } x = -1$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{0} \notin \mathbb{R}$$

¿y que ocurre en $x = 0$?

$$f(0) = \frac{0}{\ln(0^2)} = \frac{0}{\ln(0)} \leadsto$$

$\ln(0)$ no está definido
por lo que aquí debemos
reparar

(1)

¿Cómo reparamos?

Con límites! ☺

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \ln(x)} = 0$$

↗
¡Comprobar!

Luego como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ pero $f(0)$ no está definido

Así que reparamos, definimos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Luego $\tilde{f}(x)$ es continua en todo su dominio

$$\text{Dom}(\tilde{f}) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

obs: $\tilde{f}$ es la reparación de f

b) $f'(x)$ para $x \neq 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x^2)} \right)'$$

$$= \left(\frac{x}{2 \ln(x)} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x' \ln(x) - x \ln(x)'}{\ln(x)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - x \frac{1}{x}}{\ln(x)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} \right)$$

Veamos si la derivada en 0 existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)^2} - \frac{1}{\ln(x)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\cancel{\frac{1}{\ln(x)}}^0 - \cancel{\frac{1}{\ln(x)^2}}^0 \right) = 0$$

$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{f}'(0) = 0$$

$$\text{Por lo tanto } f'(0) = 0$$

Maximos y Minimos, Crecimientos

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} \right)$$

¿Cuándo $f'(x) > 0$?

$$\text{¿} \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} > 0 \text{?}$$

$$\frac{1}{2} > 0 \quad \ln(x)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{el signo me lo da } \ln(x) - 1$$

$$\Rightarrow \ln(x) - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) > 1$$

$$\Rightarrow x > e$$

Luego Como $f'(x) > 0$ para $x > e$

f es creciente en $]e, +\infty[$

Analogamente podemos ver que

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } 0 < x < e$$

Luego f es decreciente en $]0, e[$

¿ y que podemos decir de los x negativos si $\ln(x)$ no esta definido en $x < 0$?

Veamos la paridad de f

$$f(-x) = \frac{-x}{\ln((-x)^2)} = \frac{-x}{\ln(x^2)} = - \left(\frac{x}{\ln(x^2)} \right) = -f(x)$$

Es impar! Luego

Como f es creciente en $]e, +\infty[$, por ser impar tambien sera creciente en $] -\infty, -e[$

Del mismo modo f es decreciente en $]0, e[$ y por ende $] -e, 0[$

Veamos máximos, cuando $f'(x) = 0$
y mínimos

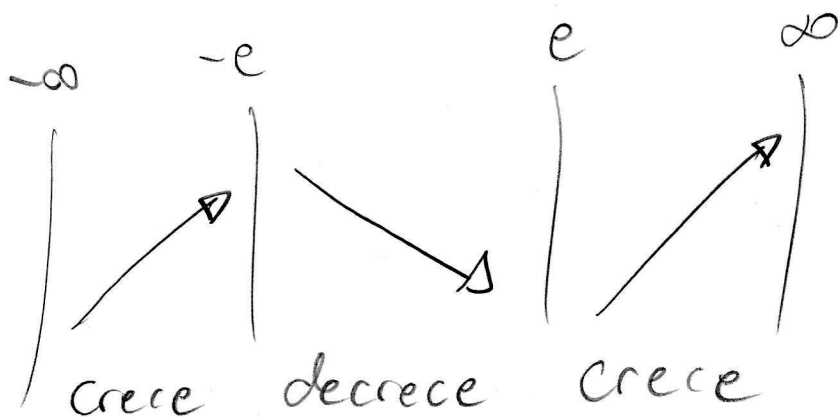
$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

Por ser impar
 $x = -e$ también
es pto crítico

haciendo una tabla



Luego en $x = e$ hay un mínimo
y en $x = -e$ hay un máximo