Reglas de derivadas

- Llamaremos la derivada de f en x_0 como

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- Derivadas conocidas

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Algebra de derivadas

$$\frac{d(f \pm g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \pm \frac{dg}{dx}(x)$$

o bien

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Cuando tengo suma de funciones y quiero derivar, me basta con calcular la derivada de cada componente por separado

Regla del producto

- $$\frac{d(f \cdot g)(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x)\, g(x) + f(x) \frac{dg}{dx}(x)$$

o bien $$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

Regla de la división

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}(x)\, g(x) - f(x) \frac{dg}{dx}(x)}{g(x)^2}$$

← "g al cuadrado"

o bien

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

Regla de la Cadena

$$\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$

Ejemplo $$f(x) = e^{\beta(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{\beta(x)} \cdot \beta'(x)$$

La derivada de e^x es si misma

Derivadas ejemplos

1) $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + \pi x + 3$

$\Rightarrow \quad f'(x) = anx^{n-1} + b(n-1)x^{n-2} + \dots + \pi$

2) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{x}$

$\Rightarrow \quad f(x)' = (x^3 + x - x^{\frac{1}{2}})'$

$= 3x^2 + 1 - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$

$= 3x^2 + 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= 3x^2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = e^{3x}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = (e^{3x})'$ Regla de la cadena

$= e^{3x} \cdot (3x)'$

$= e^{3x} \cdot 3$

4) $f(x) = \ln(-2x)$

$\Rightarrow \quad f'(x) = (\ln(-2x))'$ Cadena

$= \frac{1}{-2x} \cdot (-2x)'$

$= \frac{1}{-2x} \cdot -2 = \frac{1}{x}$

5) $f(x) = e^{x^2}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \left(e^{x^2}\right)'$ Cadena

$= e^{x^2} \cdot (x^2)'$

$= e^{x^2} \cdot 2x$

6) $f(x) = xe^x$

Producto de funciones

$\Rightarrow \quad f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + xe^{x'}$

$= e^x + xe^x$

7) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x+1}$ ← cuociente de funciones

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(e^{3x})'(x+1) - e^{3x}(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3e^{3x}(x+1) - e^{3x}}{(x+1)^2}$$

8) $f(x) = x^3 \cdot e^{\frac{1}{x}}$ ¡producto!

$$\Rightarrow f'(x) = (x^3)' e^{\frac{1}{x}} + x^3 (e^{\frac{1}{x}})'$$ Cadena

$$= 3x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^3 e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 3x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^3 e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

obs: $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -1x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$

$f(x) = a^x$

Yo se que $a = e^{\ln(a)}$

$\Rightarrow f'(x) = (a^x)' = \left[\left(e^{\ln(a)}\right)^x\right]'$

$= \left(e^{x\ln(a)}\right)'$ Cadena

$= e^{x\ln(a)} \cdot (x\ln(a))'$

$= a^x \cdot \ln(a)$