

Resolución Aux. 9

P1]

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2|x| - 15}$$

a) Dominio

- Para ver el dominio quitaremos los x en donde el denominador se hace cero. Para esto necesitamos sacar el valor absoluto.

$$* |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces, $\forall x \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15} = \frac{1}{(x+5)(x-3)}$$

de ahí tenemos que la función se indetermina en $x = -5$ y $x = 3$, pero como -5 no es mayor a cero, solo contamos el 3.

luego, $\forall x < 0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2(-x) - 15} = \frac{1}{x^2 - 2x - 15} = \frac{1}{(x-5)(x+3)}$$

la función se indetermina en $x = 5$ y $x = -3$, pero el 5 no es menor a cero, entonces solo contamos el -3 .

$\Rightarrow f(x)$ se indetermina en -3 y 3

$$\therefore \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

b) Ceros de la función

$$\rightarrow f(x) = 0 \quad (\text{con } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\})$$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2 + 2|x| - 15} = 0 \quad / \cdot (x^2 + 2|x| - 15)$$

$$\rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{contradicción}$$

$\therefore f(x) \neq 0$, es decir, la función NO tiene ceros

c) Paridad.

- Evaluaremos $f(-x)$ para ver a qué llegamos

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 2|-x| - 15} = \frac{1}{x^2 + 2|x| - 15} = f(x)$$

$$\rightarrow f(-x) = f(x)$$

$\Rightarrow$ La función f es PAR

d) Signos.

- Como la función es par, basta con estudiar los signos en $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{3\}$

• $\forall x \geq 0 \ (x \neq 3)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15} = \frac{1}{(x+5)(x-3)}$$

	0	3	∞
$x+5$	+	+	+
$x-3$	-	+	+
	-	+	+

$$\Rightarrow f(x) < 0, x \in [0, 3[$$

$$f(x) > 0, x \in]3, \infty[$$

y como es par sabemos que

$$f(x) < 0, x \in]-3, 0]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0, x \in]-\infty, -3[$$

$$\therefore f(x) > 0:]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$$

$$f(x) < 0: \forall x \in]-3, 3[$$

e) Asíntotas

- Verticales $\rightarrow$ se ven cuando el denominador de la función se puede terminar, en este caso en $x = -3 \wedge x = 3$.

$\therefore$ asíntotas verticales, rectas: $x = -3$
 $x = 3$

- Horizontales:

pueden existir cuando $x \xrightarrow{\text{hunde}} \pm \infty$ en $f(x)$, es decir, se evalúa el $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$, como la

función es par basta con estudiar el límite a $+\infty$.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 15} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$\therefore$ las asíntotas horizontales hacia $+\infty$ y $-\infty$, se encuentran en la recta $y=0$

5) como la función es par ($f(-x) = f(x)$)

- Sabemos que NO es inyectiva

P2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2}$$

$$\star \frac{x}{x+2} \cdot \frac{1/x}{1/x} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\star \text{ Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\text{entonces, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2} = 1$. Si lo pensamos a medida que tomamos números más grandes el " $+2$ " se va haciendo cada vez más irrelevante, por lo que el número 2 y el

denominador se van haciendo cada vez más parecidos, por lo que la división se va a acercar cada vez más a 1

P3)

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x + 1}{\pi x^2 - 1}$$

$$\cdot \frac{6x^2 + x + 1}{\pi x^2 - 1} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2} = \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{\pi x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\pi - \frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + x + 1}{\pi x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\pi - \frac{1}{x^2}} = \frac{6 + 0 + 0}{\pi - 0} = \frac{6}{\pi}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + x + 1}{\pi x^2 - 1} = \frac{6}{\pi}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\cdot \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} \cdot \frac{1/x}{1/x} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{3}{x}} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{x + 2 + \frac{3}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{x + 2 + \frac{3}{x}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-x+1}$$

$$\cdot \frac{x^3}{-x+1} \cdot \frac{1/x}{1/x} = \frac{x^3}{\frac{-x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{-1 + \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-1 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-x+1} = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3}$$

$$\cdot \frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{1/x}{1/x} = \frac{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

f) * si lo hago no lo entenderian porque necesitan teoremas que no han visto.

P4] $\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty?$

Para que el limite exista, este debe ser unico, es decir, si lo "miro" por la derecha y si lo "miro" por la izquierda debe ser el mismo valor, si son distintos el limite no existe

• Para ver este caso estudiaremos estos dos limites (se llaman limites laterales)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\uparrow$
 límite
 por la
 derecha
 límite acerca por
 los números positivos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$\uparrow$
 límite por
 la izquierda.
 límite acerca por los
 números negativos

Como los límites laterales no existen, entonces

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$, no existe.