

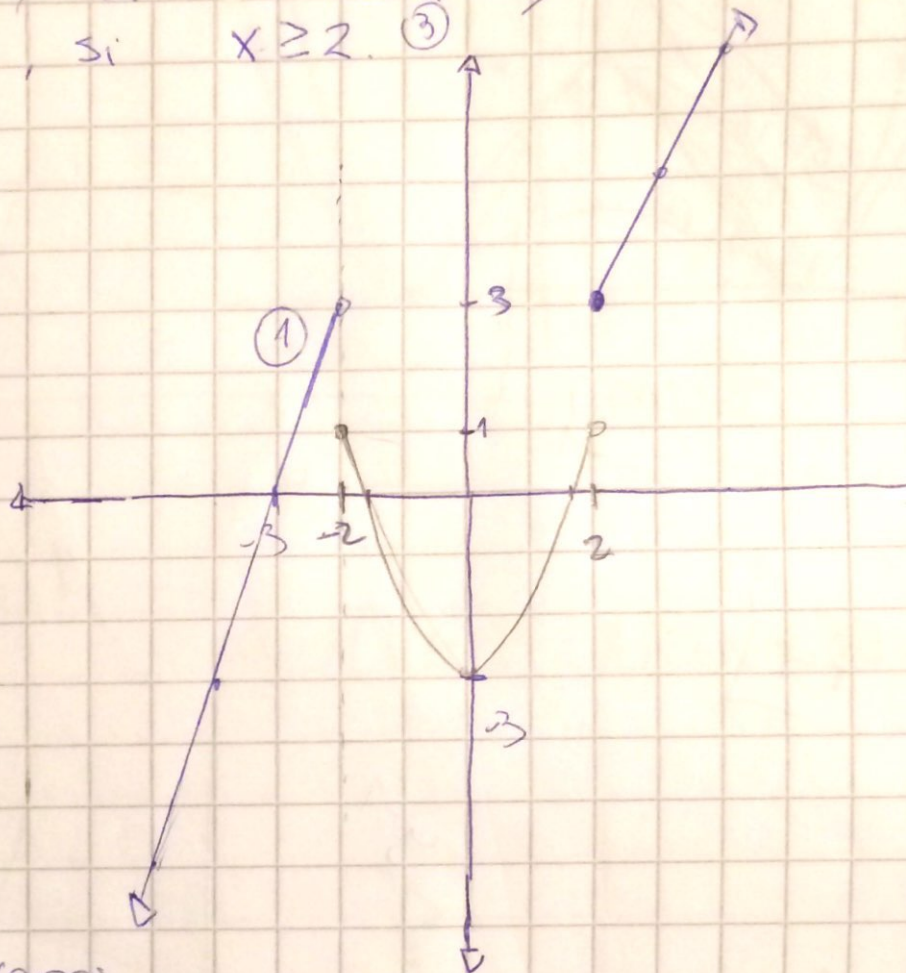
P1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 3x+9, & \text{si } x < -2 \quad (1) \\ x^2-3, & \text{si } -2 \leq x < 2 \quad (2) \\ 2x-1, & \text{si } x \geq 2 \quad (3) \end{cases}$$

(2) → componente

a) graficar.

Para graficar una función por partes, graficamos cada componente por separado según sus restricciones en el dominio.



b) identificar ceros:

para encontrar los ceros (intersección con el eje x), calcularemos los ceros de cada componente y luego veremos si cumplen con las condiciones de x .

① $f(x) = 3x+9, \quad x < -2$

ceros $\Rightarrow f(x) = 0 \rightarrow 3x+9 = 0$

$3x = -9 \quad | \cdot 1/3$

$x = -3$

* como $-3 < -2$
si es cero de la función

② $f(x) = x^2-3, \quad -2 \leq x < 2$

$0 = x^2-3$

$3 = x^2$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$

* $\sqrt{3} \approx 1,7...$

como $-2 \leq -\sqrt{3}$

y $\sqrt{3} < 2$, ambos cumplen con

ser ceros de la función

$$③ f(x) = 2x - 1, \quad x \geq 2$$

$$0 = 2x - 1$$

$1 = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}$, en este caso $\frac{1}{2}$ no es mayor a 2, por lo que no se encuentra en la función.

$\therefore$ Ceros ($f(x)$) son $x = -3$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

c) analizar inyectividad y sobreyectividad

- Para analizar si es o no inyectiva, veremos cada componente por separado. (basta ^{con} que una no sea inyectiva para que la función no lo sea)

$$① f(x) = 3x + 9$$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, $x_1 < -2$ $\wedge$ $x_2 < -2$
consideremos $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow 3x_1 + 9 = 3x_2 + 9 \quad / -9$$

$$3x_1 = 3x_2 \quad / \cdot 1/3$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ la primera parte es inyectiva

$$② f(x) = x^2 - 3$$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, $-2 \leq x_1 < 2$ $\wedge$ $-2 \leq x_2 < 2$.
consideremos $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 3 = x_2^2 - 3 \quad / +3$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm x_2 \quad \vee \quad x_2 = \pm x_1$$

$\therefore$ Como x_1 no es igual a x_2 , esta parte no es inyectiva, con lo que tenemos que la función no es inyectiva

* la tercera componente es una recta por lo que no es necesario comprobar que es inyectiva, ya que se procede igual que en ①

Para analizar la sobreyectividad hay que estudiar el recorrido de la de componente, y si la unión de estas es igual al codominio de $f(x)$ ($\mathbb{R}$) entonces la función es sobreyectiva

① $f(x) = 3x + 9, x < -2$

- Como es una recta de pendiente positiva, sabemos que la función siempre crece, entonces como el "máximo" valor que toma x es -2 , $3x + 9$ evaluado en -2 será el punto más alto que tendrá en el eje y

$$\rightarrow 3(-2) + 9 = -6 + 9 = 3$$

$$\Rightarrow \text{Recorrido: }]-\infty, 3[$$

② $f(x) = x^2 - 3, -2 \leq x < 2$

- En este caso tenemos una parábola donde su vértice será el menor valor que tome, como el valor de x está restringido por la izq. y por la derecha, $x^2 - 3$ tendrá un valor máximo en este intervalo. Como es simétrico con respecto al eje y solo basta calcular $f(-2)$ para tener el valor máximo

$$f(-2) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$\text{vértice: } (0, -3)$$

$$\Rightarrow \text{Recorrido: } [-1, 1]$$

③ $f(x) = 2x - 1, x \geq 2$

- Se procede parecido al caso uno, en esta parte solo basta encontrar el valor de $f(2)$, ya que después la recta crece hasta el ∞

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \text{Rec: } [3, \infty[$$

Ahora unimos los 3

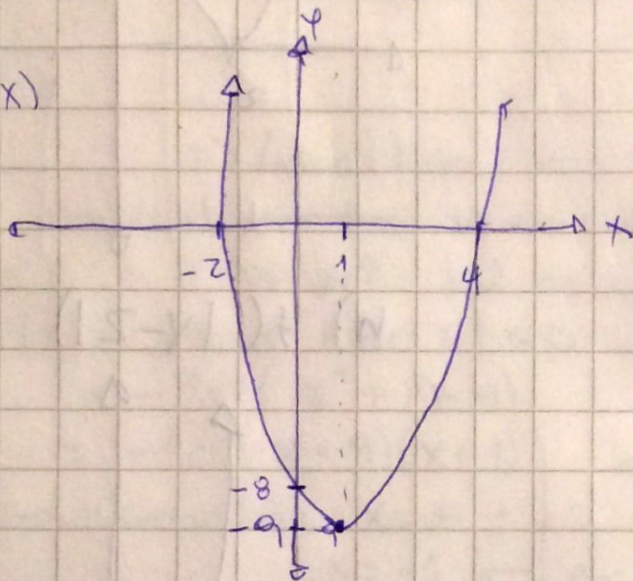
Recomiendo $f:]-\infty, 3[\cup [3, \infty[$

$=]-\infty, \infty[= \mathbb{R} = \text{codominio } f$

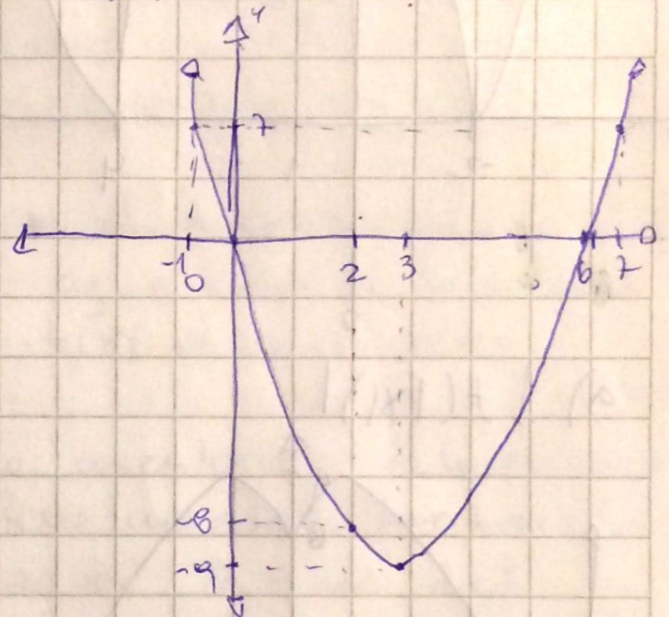
$\therefore$ la función es sobreyectiva

P2] $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = (x-4)(x+2)$

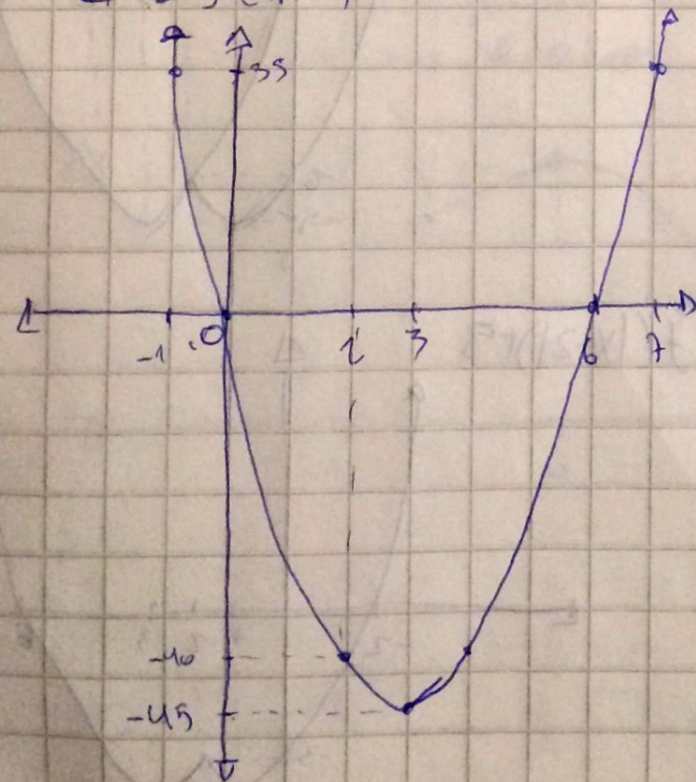
a) $f(x)$



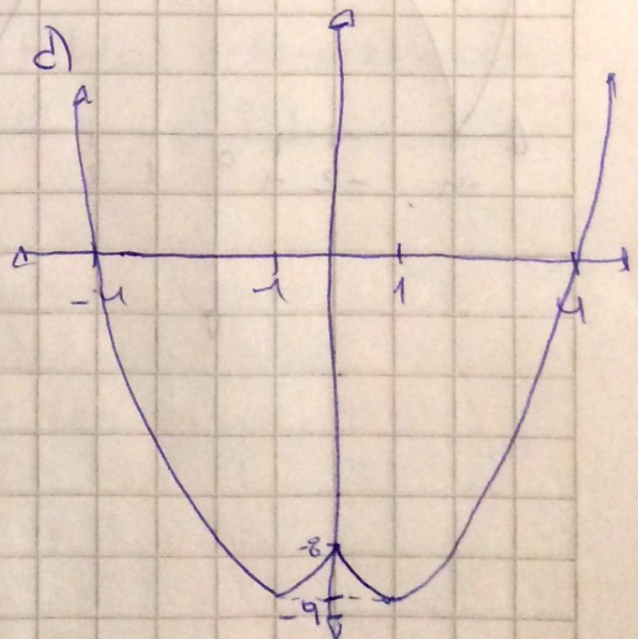
b) $f(x-2)$



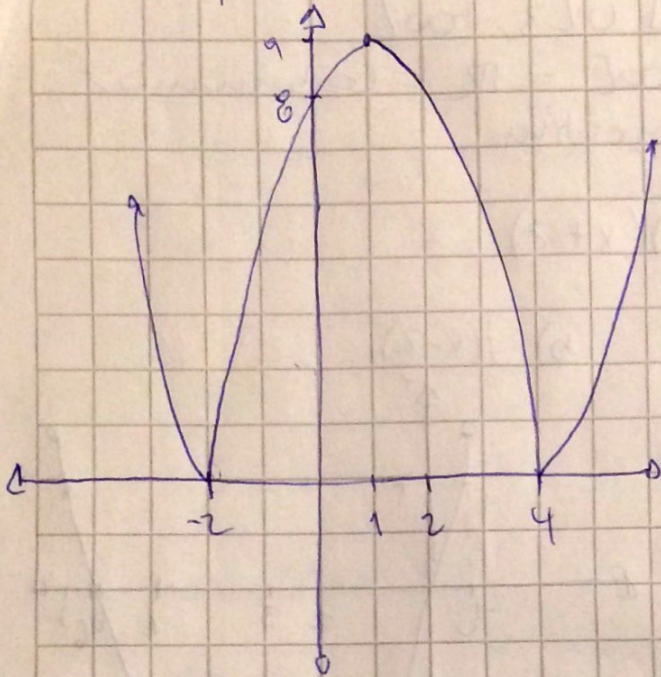
c) $5f(x-2)$



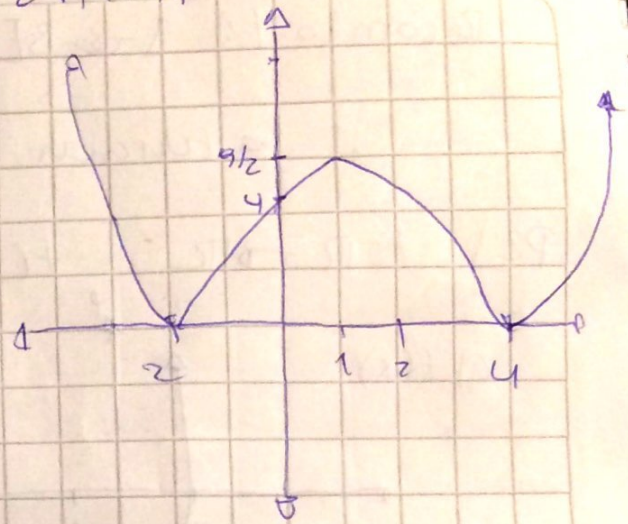
d)



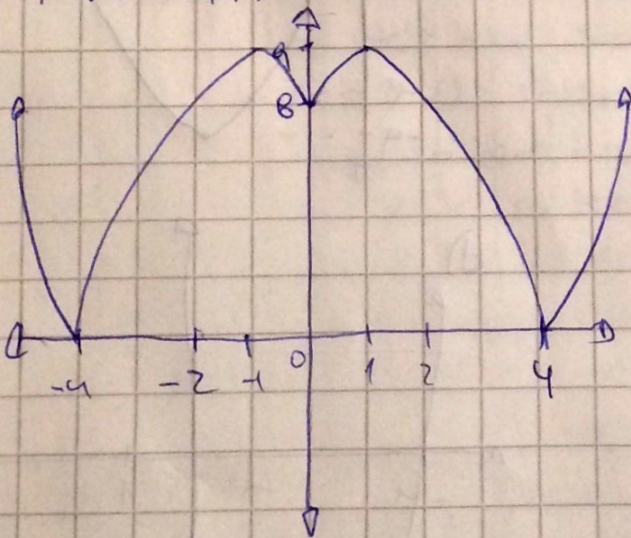
e) $|f(x)|$



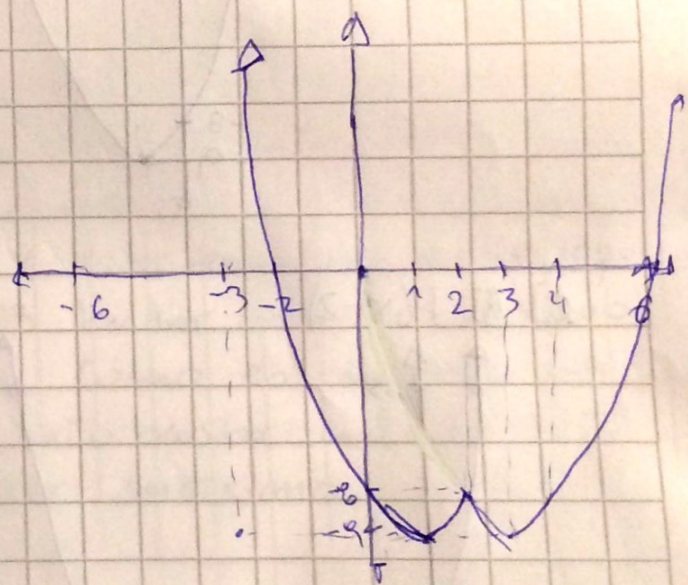
f) $\frac{1}{2}|f(x)|$



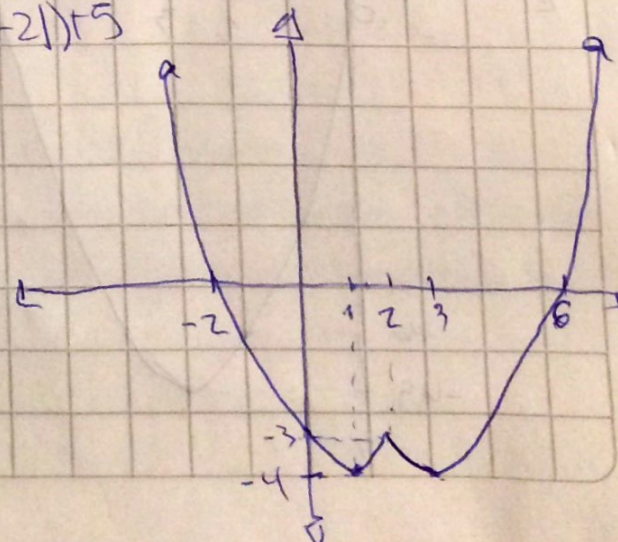
g) $|f(|x|)|$



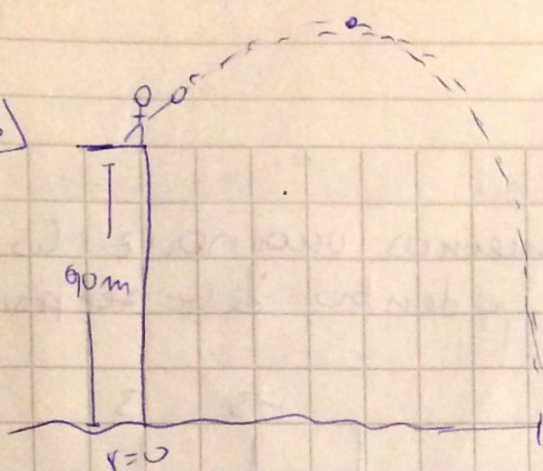
h) $f(|x-2|)$



i) $f(|x-2|)+5$



P3)



$$h(x) = -10x^2 + 80x + 90$$

• Como la altura la modela una parábola que va para abajo el punto máximo se encuentra en el vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{-20} = \frac{80}{20} = 4$$

$$\begin{aligned} y_v = h(4) &= -10 \cdot 4^2 + 80 \cdot 4 + 90 \\ &= -10 \cdot 16 + 320 + 90 \\ &= -160 + 410 = 250 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la altura máxima que alcanza el proyectil ~~se~~ se encuentra sobre 250m del nivel del mar.

b) $h(x) = -10x^2 + 80x + 90$

$$= -10(x^2 + 8x + 9)$$

$$= -10(x - 9)(x + 1)$$

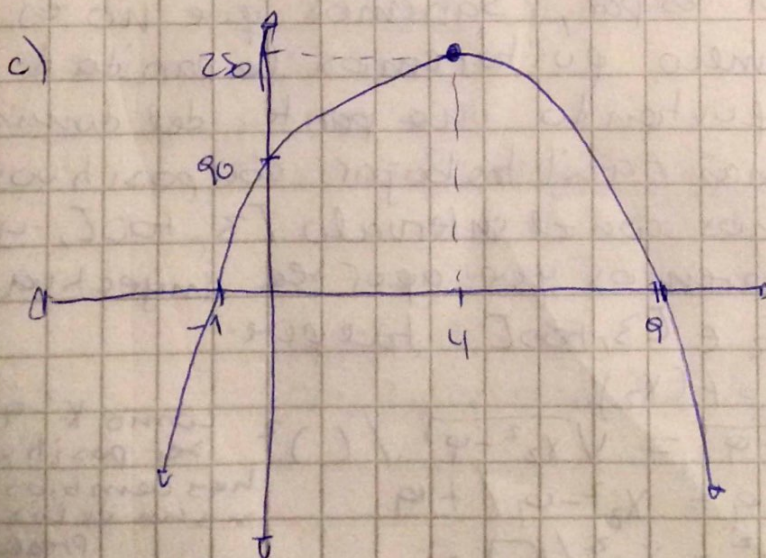
$\Rightarrow \text{ceros}(h): x = 9$

$x = -1$ $\leftarrow$ por la orientación de la persona el valor negativo no puede ser tomado

$\Rightarrow$ el proyectil toca el agua a 9m del acen ~~hacer~~

* el proyectil toca el agua cuando la función $h(x)$ se hace cero

$$\begin{aligned} * h(0) &= -10 \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 90 \\ &= 90 \end{aligned}$$



P-1) $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$
 $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

a) Dominio

$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, como tenemos una raíz lo que está adentro debe ser positivo

$$\Rightarrow x^2 - 9 \geq 0$$

$$(x-3)(x+3) \geq 0$$

$x=3, x=-3$ puntos "críticos"

	-3	3
$x-3$	-	+
$x+3$	-	+
•	+	-

Entonces el dominio de f será

$$]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \wedge x \geq 3$$

$$x^2 - 9 \geq 0$$

b) P.d.f. f es par

Para ver si es par hay que demostrar que

$$f(-x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x), \text{ o.} f \text{ es par.}$$

c) Como la función es par, sabemos que no es inyectiva. Primero quitaremos la parte de la función quitando una parte del dominio. Dado que es más fácil trabajar con positivos nos quedaremos con el intervalo $[3, +\infty[$, y ahora analizaremos que ahora sea inyectiva

$\Rightarrow$ Sean $x_1, x_2 \in [3, +\infty[$ tal que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 - 9} = \sqrt{x_2^2 - 9} \quad / ()^2 \quad \text{como } x^2 - 9 \text{ debe ser positivo no hay cambios de signo de los } \sqrt{\quad} \text{ por eso se puede}$$

$$x_1^2 - 9 = x_2^2 - 9 \quad / +9$$

$$x_1^2 = x_2^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$ como $x \in [3, +\infty[$ no se considera el caso negativo

$\therefore$ la función es inyectiva en $A = [3, +\infty[$

sobreyectividad: Determinaremos el Recorrido de $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 - 9} \geq 0 \quad (\text{por que es raíz})$$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \therefore$ el recorrido de la función son $\mathbb{R}_0^+$

- Para que sea sobreyec. necesitamos que el Codom. y el Recorrido sean iguales, por lo tanto el conjunto B que necesitamos es $B = \mathbb{R}_0^+$
 $\therefore$ en $A = [3, \infty[$ y $B = \mathbb{R}_0^+$ la función es biyectiva

d) función inversa

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$\rightarrow y = \sqrt{x^2 - 9} \quad | \quad ()^2$$

$$y^2 = x^2 - 9 \quad | \quad +9$$

$$y^2 + 9 = x^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{y^2 + 9} = x = f^{-1}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 9}$$

* comprobación

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

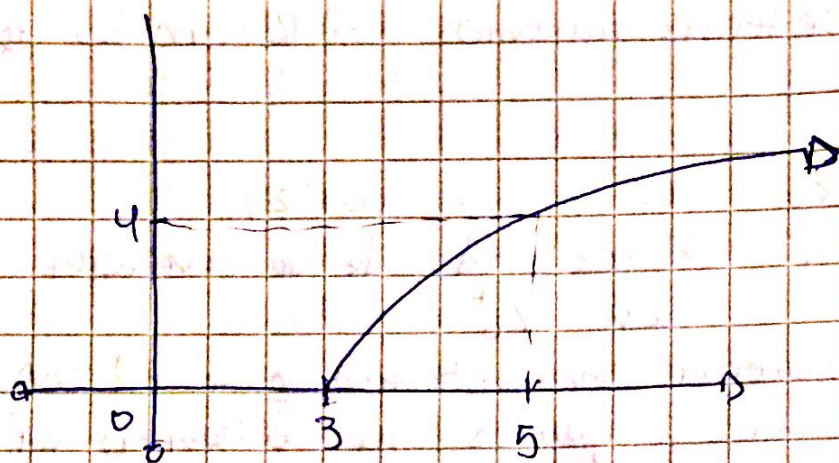
$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x^2 + 9}) \\ &= \sqrt{(\sqrt{x^2 + 9})^2 - 9} \\ &= \sqrt{x^2 + 9 - 9} = \sqrt{x^2} = |x| = x \end{aligned}$$

como x vive en los números $+$

$$\therefore f \circ f^{-1}(x) = x$$

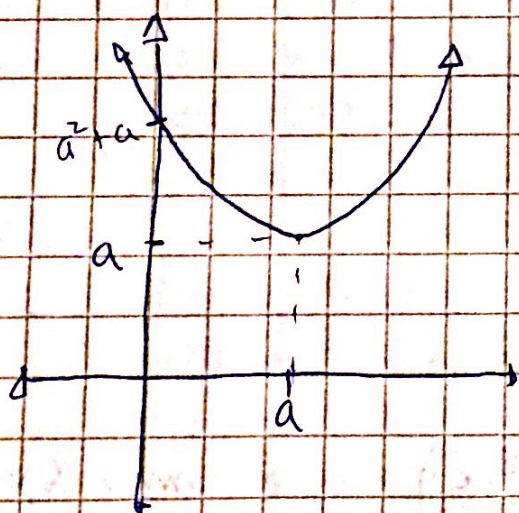
$\Rightarrow$ la inversa de f , f^{-1} es $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

e) Gráfico (función restringida)

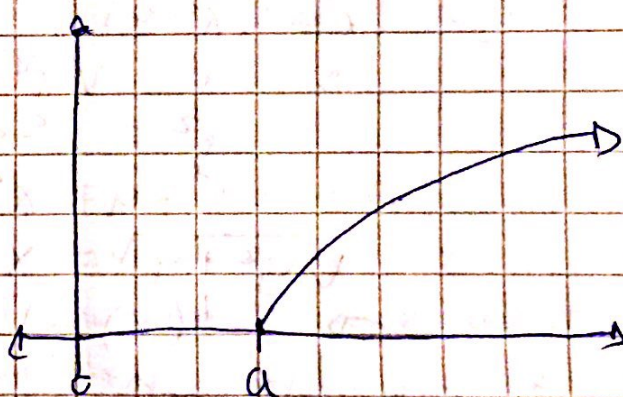


P51 * have solo el caso $a \geq 0$.

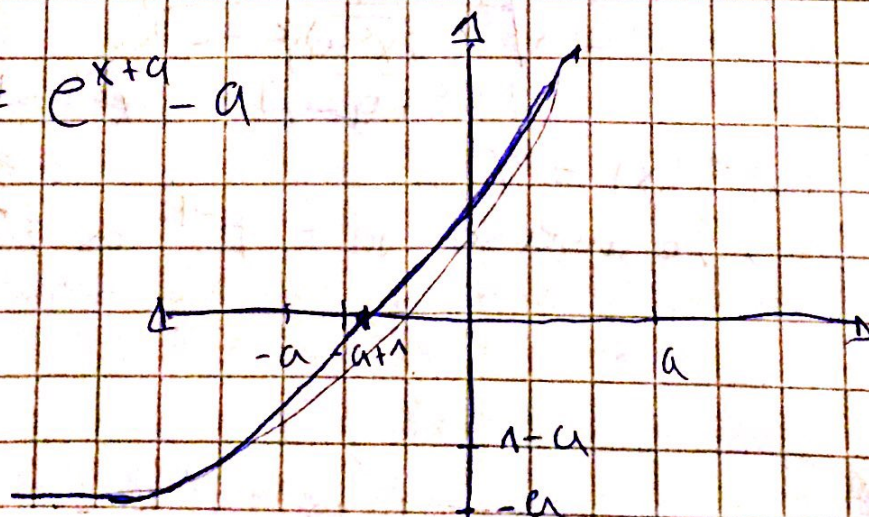
a) $f(x) = (x-a)^2 + a$



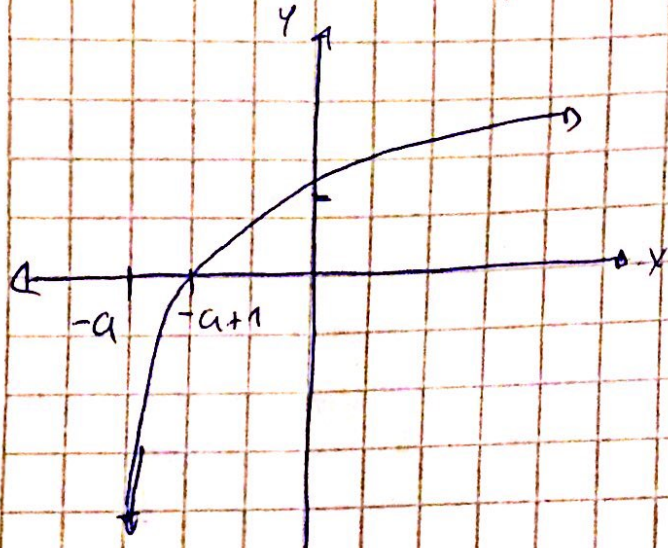
b) $f(x) = \sqrt{x-a}$



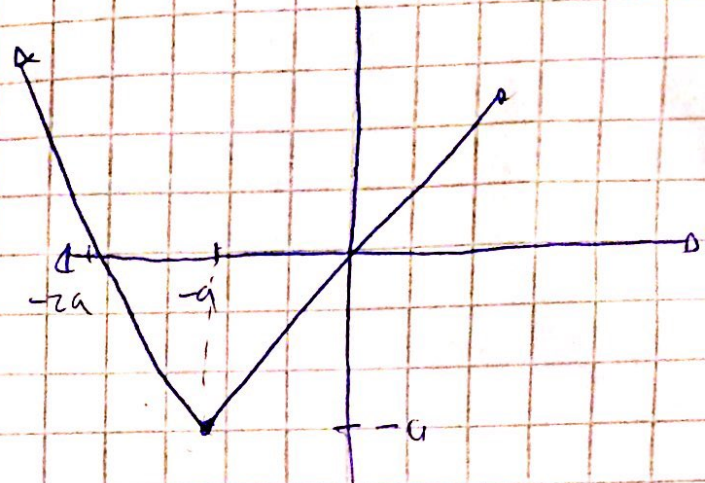
c) $f(x) = e^{x+a} - a$



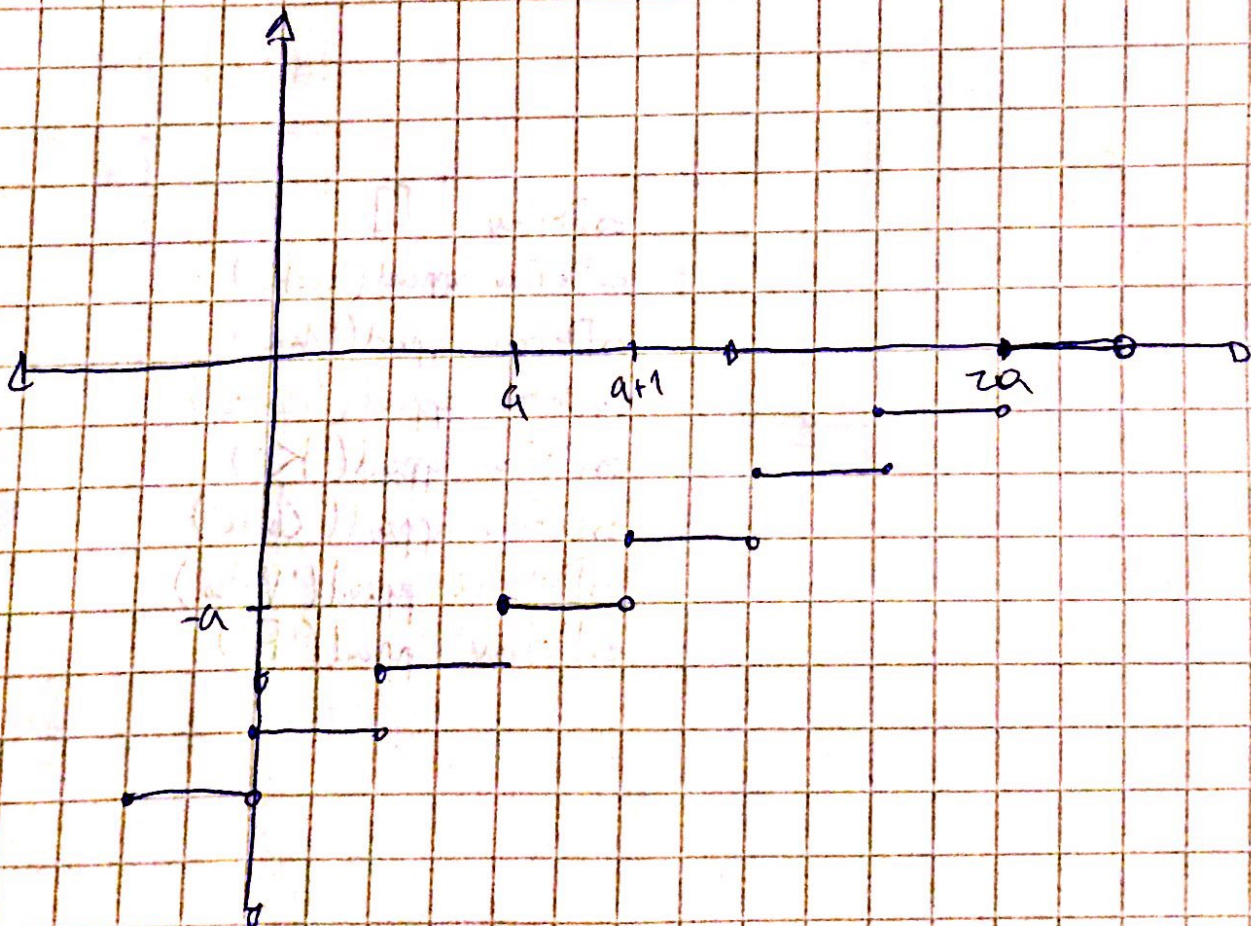
d) $f(x) = \ln(x+a)$

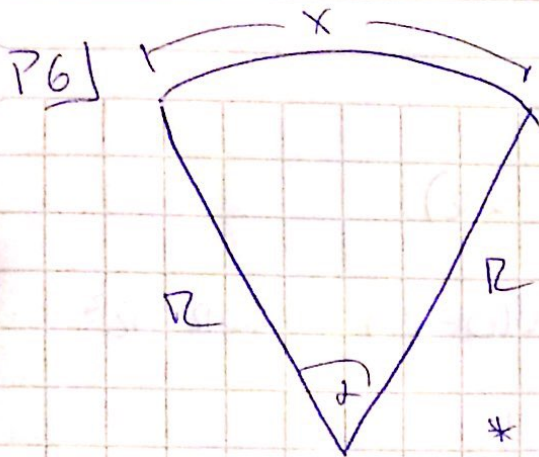


e) $f(x) = |x+a| - |a|$



f) $f(x) = [x-a] - a$





← Parte de una circunferencia
20 m de alambre para
cercar $\Rightarrow R + R + X = 20$
¿Radio máximo?
Para área máxima

* Sabemos que si α es 360° entonces
 X equivale al Perímetro de la circun-
ferencia ($2\pi R$), pero necesitamos
 X para cualquier ángulo α

$$\rightarrow \text{Si } \begin{matrix} 360^\circ & \longrightarrow & 2\pi R \\ \alpha & \longrightarrow & X \end{matrix}$$

$$\rightarrow 360 \cdot X = 2\pi R \alpha$$

$$X = \frac{2\pi R \alpha}{360}$$

Realizamos la misma analogía pero para el área

$$\text{Si } \begin{matrix} 360^\circ & \longrightarrow & \pi R^2 \\ \alpha & \longrightarrow & A \end{matrix}$$

$$360 \cdot A = \pi R^2 \alpha$$

$$A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = A(R, \alpha) \text{ 2 variables}$$

necesitamos solo una

Sabemos que

$$R + R + X = 20$$

$$\rightarrow R + R + \frac{2\pi R \alpha}{360} = 20, \text{ despejamos } \alpha$$

$$\frac{2\pi R \alpha}{360} = 20 - 2R$$

$$2\pi R \alpha = 360(20 - 2R)$$

$$\alpha = \frac{360(20 - 2R)}{2\pi R}$$

reemplazando en A

$$A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \frac{360}{2\pi R} (20 - 2R)$$

$$= \frac{R(20 - 2R)}{2} = R(10 - R) = 10R - R^2$$

$$\rightarrow A(R) = 10R - R^2,$$

tenemos que el Área de nuestro sector es modelada por una parábola que va hacia abajo, es decir, tiene un punto máximo

vertice $\rightarrow R_v = \frac{-b}{2a} = \frac{+10}{+2} = 5$

nuestro "x" del vertice que es el radio del sector es $R = 5m$

* este radio maximiza el área
 a $A(5) = 10 \cdot 5 - 5^2 = 50 - 25 = 25$
 área máxima = $25m^2$