

Resolución Aux #6

$\forall x \in \text{Dom}(f) \exists! y \in \text{Codom}(f) f(x) = y$ Función
 $\forall x, y \in \text{Dom}(f) f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ y n y
 $\forall y \in \text{Codom}(f) \exists x \in \text{Dom}(f) f(x) = y$ sobre

P1) a) ¿Cuales son funciones?

- La figura (a) es función cuyo $\text{Dom}(f) = \{a, b, c, d, e\}$ y $\text{Im}(f) = \{3\}$

- La figura (b) no es función pues $b \in A = \text{Cto de inicio}$ no tiene imagen y $c \in \text{Dom}(f)$ tiene 2 imágenes

obs: La preimagen x solo puede tener una única imagen

- La figura (c) es función cuyo Recorrido o $\text{Im}(f)$ es $\{1, 2, 3, 4\}$. Notar que a pesar que $(a, 3)$ y $(e, 3)$ tienen el segundo componente igual sigue siendo función

- La figura (c) es función con $\text{Im}(f) = \{1, 2, 4, 5\}$

b) • (a) no es inyectiva, pues $(a, 3)$ y $(b, 3)$ están en la función pero $a \neq b$

- (b) no puede ser inyectiva, ni siquiera es función

- (c) no es inyectiva, pues $(a, 3)$ y $(e, 3)$ están en la función pero $a \neq e$

- (d) no inyectiva, $(a, 5)$ y $(e, 5)$ están en la función pero $a \neq e$

c) Para que una función sea sobreyectiva debe ocurrir que $\text{Im}(f) = \text{Codom}(f)$, en este caso deben estar relacionados todos los elementos de la llegada

• (a) no sobreyectiva por $\text{Im}(f) = \{3\}$
 $\text{Codom}(f) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

• (b) no sobreyectiva, no es función

• (c) Si lo es, $\text{Im}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$
 $\text{Codom}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

• (d) No, falta el 3

P2) a) $f(x) = -x + 2$

Como no hay restricciones $\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
 $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (x-3)^2 + 15$

No hay restricciones para "x" $\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Para el recorrido seguimos el vertice

$V = (3, 15)$ porque está en su forma canónica,
luego como la parábola va hacia arriba
 $\Rightarrow \text{Rec}(f) = [15, +\infty[$

$$c) f(x) = -x^2 - 8x - 17$$

forma 1) Calculamos el vertice $V_f = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

$$\Rightarrow a = -1, \quad b = -8, \quad c = -17$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2(-1)} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$\begin{aligned} f(-4) &= -(-4)^2 - 8(-4) - 17 \\ &= -16 + 32 - 17 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow V_f = (-4, -1)$, Como la parabola va hacia abajo
 $\Rightarrow \text{Rec}(f) =]-\infty, -1]$

forma 2) Pasemos a su forma canónica

$$f(x) = -x^2 - 8x - 17$$

$$= -(x^2 + 8x + 17)$$

$$= -(x^2 + 8x + 16 + 1)$$

$$= -(x^2 + 8x + 16 + 1)$$

$$= -(x+4)^2 - 1$$

hacia abajo

$$\Rightarrow \text{Rec}(f) =]-\infty, -1]$$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

• la restricción para "x" es que sea mayor o igual a 0 $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = [0, +\infty[$

• la raíz de un real siempre es positiva o 0

$\Rightarrow \text{Rec}(f) = [0, +\infty[$

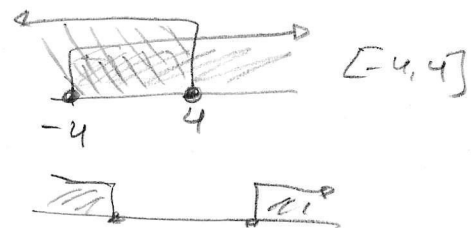
e) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

• $16 - x^2 \geq 0$ para que no nos que "√ algo"

$\Rightarrow 16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (4-x) \cdot (4+x) \geq 0$

dos casos: $4-x \geq 0 \wedge 4+x \geq 0$

o $4-x \leq 0 \wedge 4+x \leq 0$



$\Rightarrow x \in [-4, 4] \cup \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in [-4, 4] \Rightarrow \text{Dom}(f) = [-4, 4]$

• Veamos las restricciones para el recorrido, como $\text{Dom}(f) = [-4, 4]$ debe existir recorrido (¿Por qué?)

sea $y \in \text{Rec}(f) \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$ para algun "x"

$\Rightarrow y^2 = 16 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 16 - y^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{16 - y^2} \text{ o } x = -\sqrt{16 - y^2}$

en ambos casos $16 - y^2 \geq 0$ para estar en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow y \in [-4, 4]$ pues es la misma ecuación

$\therefore \text{Rec}(f) = [-4, 4]$

$$f) f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

• Si $x=0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{0}$ K-Boom! explota el universo

luego $0 \notin \text{Dom}(f) \dots$ y es la única restricción

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Como existe al menos un elemento en el recorrido
¿Por qué?

$$\text{Sea } y \in \text{Rec}(f) \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{Para algún } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow xy = x - 1$$

$$\Rightarrow xy - x = -1$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{(y-1)}$$

Aquí pedimos que $y \neq 1$, pues si $y=1$ entonces

$$x = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0} \dots \text{K-Boom! explosión} \text{ y necesitamos}$$

que el "x" exista. Por lo que $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\Rightarrow \text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$g) f(x) = \frac{x+2}{2x-4}$$

Del mismo modo...

$$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Para el recorrido...

Sea $y \in \text{Rec}(f)$ ¿Por qué podemos tomar un elemento?

$$y = \frac{x+2}{2x-4} \quad \text{Para algún } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\Rightarrow y(2x-4) = x+2$$

$$\Rightarrow 2yx - 4y = x+2$$

$$\Rightarrow 2yx - x = 2 + 4y$$

$$\Rightarrow x(2y-1) = 2+4y$$

$$\Rightarrow x = \frac{2+4y}{2y-1} \quad \Rightarrow \quad 2y-1=0 \quad \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$$

$$\text{Luego } \text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$$

$$h) f(x) = |-x+2|$$

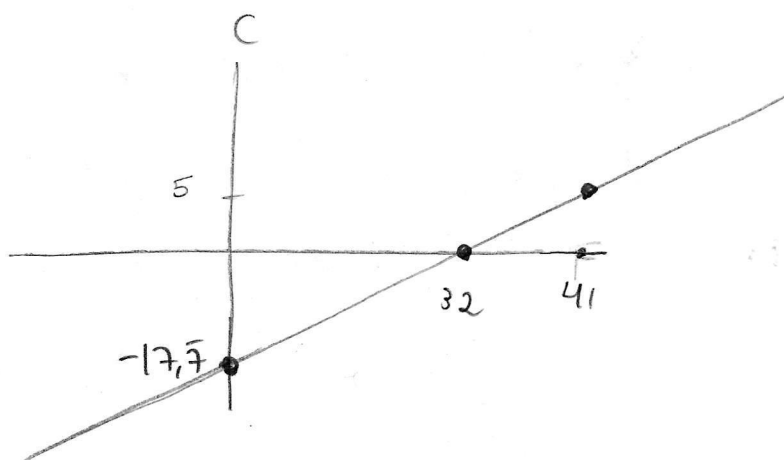
• No hay restricciones en $x \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

• Como $f(x) = |-x+2| \geq 0 \Rightarrow \text{Rec}(f) = [0, +\infty[$

P3) $C = \frac{5}{9} (F - 32)$

a)

F	C
0	-17,7
32	0
41	5



b) Determinar el valor de C o F si $C = F$

$$\Rightarrow C = \frac{5}{9} (F - 32)$$

$$\Rightarrow F = \frac{5}{9} (F - 32) \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} C = F$$

$$\Rightarrow 9F = 5F - 160$$

$$\Rightarrow 4F = -160$$

$$\Rightarrow F = -40$$

c) ¿ $F = 2C$? $\Rightarrow C = \frac{5}{9} (2C - 32)$

$$\Rightarrow 9C = 10C - 160$$

$$\Rightarrow C = 160 \quad \Rightarrow F = 320$$

P4) $f(x) = 2x + 1$

a) Demostrar inyectividad

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tal que

$$f(x_1) = f(x_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ es inyectiva

b) ¿Sobreyectiva?

Sea $y \in \text{Codom}(f)$, debemos encontrar un $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = y$, donde $y \in \text{Codom}(f)$ arbitrario

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = y \Rightarrow 2\bar{x} + 1 = y$$

$$\Rightarrow 2\bar{x} = y - 1$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{y-1}{2}$$

Luego para cualquier $y \in \text{Codom}(f)$ $\exists \bar{x} = \frac{y-1}{2}$

$$\text{tal que } f(\bar{x}) = 2\bar{x} + 1 = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$$

$(\Rightarrow) f(\bar{x}) = y \quad \therefore f$ es sobreyectiva

c) Como es inyectiva y sobreyectiva $\Rightarrow$ es biyectiva
Veamos su inversa.

haciendo el mismo proceso...

$$\Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Aquí cambiamos $x \mapsto f^{-1}(x)$
 $y \mapsto x$

$$\Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

por lo que se tiene
la inversa $\square$

PS a) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 3x+2 \geq 0\}$$

$$\Rightarrow 3x+2 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -2$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

Luego $\text{Dom}(f) = [-\frac{2}{3}, +\infty[$

b) No es Sobreyectiva pues el $\text{codom}(f) = \mathbb{R}$
pero como $\sqrt{\cdot} \geq 0$ siempre es positiva
entonces ¿voy a ser capaz de encontrar imágenes
negativas? NO!. Luego no es Sobreyectiva
Es: $y = -1$ no tiene preimagen

• Inyectividad:

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tal que

$$\sqrt{3x_1+2} = \sqrt{3x_2+2} \quad |(\cdot)^2$$

$$(\Rightarrow) \quad (\sqrt{3x_1+2})^2 = (\sqrt{3x_2+2})^2$$

$$\Rightarrow \quad 3x_1+2 = 3x_2+2$$

$$\Rightarrow \quad 3x_1 = 3x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\therefore$ es inyectiva