FM402-1 Matemática II: Límites y continuidad de funciones
Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Marcelo Navarro y Enrique Vílchez

Resumen

10 de enero de 2016

1. Elementos de una función

Leamos la siguiente frase

“ Sea una función $f : A \to B$ tal que $f(x) = y$ ”

Aqui podemos identificar lo siguiente:

- “f” es la letra con la que se representa la función.
- A es un conjunto, y se le puede llamar de distintas formas como “Conjunto de Partida” o “**Dominio** de f”.
- B es un conjunto, y se le llama “Conjunto de Llegada” o “**Codominio** de f”.
- “$f : A \to B$”, me dice que la función parte en el conjunto A y llega hasta B.
- De la expresión “$f(x) = y$”, podemos decir que “y es **imagen** de x” o equivalentemente “x es **pre-imagen** de y”.
- $f(A)$, es el **conjunto imagen** o **recorrido** de la funcion f

1.1. Evaluacion de funciones

Sea $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{3x + 21}$ que ocurre si nos preguntan.

Calcule las siguientes evaluaciones

a) g(-4)

b) g(5)

c) g(10)

En estos casos, debemos entender la función $g(x)$ como una formula en cual yo le dare valores a x, es decir, $g(5)$ vendria siendo reemplazar x por 5, por otro lado $g(-4)$ seria reemplazar en la formula $x = -4$

Respuesta

a) $g(-4) = \sqrt{3 \cdot (-4) + 21} = \sqrt{-12 + 21} = \sqrt{9} = 3$

b) $g(5) = \sqrt{3 \cdot (5) + 21} = \sqrt{15 + 21} = \sqrt{36} = 6$

c) $g(10) = \sqrt{3 \cdot (10) + 21} = \sqrt{30 + 21} = \sqrt{51}$

1.2. Cálculo de imagen y pre-imagen de elementos

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 6$ que pasa si nos preguntan lo siguiente, ¿Cual es la pre-imagen de 19?, esta pregunta en español dice lo siguiente ¿Que valor de x hace que al evaluarlo en la función, el resultado sea 19?

Este tipo de preguntas se puede responder planteando una ecuación. Como $f(x) = 5x - 6$, debemos encontrar el valor x tal que $f(x) = 19$. luego planteamos el problema que seria

$$5x - 6 = 19$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

Resolvemos con un poco de algebra y obtenemos que la solución es $x = 5$, luego la respuesta a ¿cual es la pre-imagen de 19? seria, la pre-imagen de 19 es 5 ya que $f(5) = 19$

Por otro lado, que ocurre si nos preguntan ¿Cual es la imagen de -8?, en español dice ¿cual es el valor que toma la función cuando $x = -8$?, si logran notar, este problema se reduce a calcular f(-8) que es una evaluación de función, entonces

$$f(-8) = 5(-8) - 6 = -40 - 6 = -46$$

Luego la imagen de -8 es -46, puesto que $f(-8) = -46$

Finalmente terminamos esta parte mencionando algo muy importante, cuando ustedes imponen una ecuación para calcular imagenes y pre-imagenes hay algunas veces donde la ecuacion no tendra solución ¿que conclusión pueden sacar de eso? por ejemplo en la funcion $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{3x + 21}$ analizar la imagen de -10.

1.3. Recorrido v/s codominio

Notemos que no necesariamente se tiene el codominio de f con el conjunto imagen de f (recorrido) sean iguales, y es simplemente porque se definen de manera distinta. El Codomonio de f podemos entenderlo como a los valores que "posiblemente" pueda llegar a tomar la función sin saber la formula o la intención que esta tiene, mientras que el recorrido de f es el conjunto de todos los valores que realmente toma la funcion, es decir, son todos los elementos del codominio que poseen una pre-imagen.

Definición: Sea f una función, tal que $f : A \to B$ con $f(x) = y$. Se define el Recorrido de f o conjunto imagen de f como:

$$Im(f) := \{y \in B \mid (\exists x \in A) f(x) = y\}$$

Ejemplo 1: Diagramas sagitales

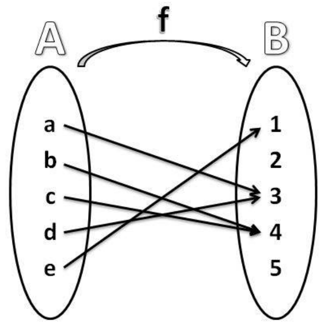


Figura 1: recorrido v/s codominio

La cosa que ven ahi es un diagrama sagital, es una forma ilustrativa de representar una función, las flechas entre los elementos representan la relacion entre pre-imagen e imagen, por ejemplo $f(a) = 3$ y $f(e) = 1$. de aqui notamos que:

- El dominio de f es el conjunto A, es decir
$$Dom(f) = A = \{a, b, c, d, e\}$$
- El codominio de f es el conjunto B, ademas podemos escribir $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- El recorrido de f son todos los elementos del codominio B que tienen relacionado un elemento de A, en este caso.
$$Im(f) = 1, 2, 3, 4$$

Se puede notar que como el 5 no esta relacionado con ningun elemento del conjunto A, es por esto que este numero no pertenece al recorrido, pero aun asi pertenece al codominio

Ejemplo 2: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, estudiemos los elementos de la función.

Podemos notar que tanto el dominio como el Codominio de f es el conjunto de los reales $\mathbb{R}$, pero si queremos estudiar el recorrido de f debemos ver el codominio, que en este caso es R y ver cuales son los valores que tienen pre-imagen. Como $f(x) = x^2$ se deduce que los valores que toma f son solo **Positivos o 0** puesto que cualquier numero real al cuadrado es positivo o bien es 0. Es decir si me paro el un numero positivo del codominio siempre encontrare una pre-imagen, por otro lado si me paro en un numero negativo del cododiminio por ejemplo "-1" y quiero ver que pre-imagen tiene debere plantear una ecuación como lo vimos anteriormente. La ecuación es

$$x^2 = -1$$

Como estamos trabajando con numeros reales, esto no tiene sentido por lo tanto no existe pre-imagen para imagenes negativas, es decir en este caso el recorrido seria

$$Im(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

2. ¿Cómo graficar una función?

Para poder responder esta pregunta, primero definamos lo siguiente:
Definición: Llamaremos **Gráfico de una función** f al conjunto de puntos del plano G_f definido por:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge y = f(x)\}$$

Esto quiere decir que cada par (x, y), donde y es el resultado de la evaluación de todos los x del dominio de la función, dibujado en el plano, va a corresponder al gráfico de f.
En general, se conocen varias funciones, de las cuales uno debe conocer la forma general de su gráfico:

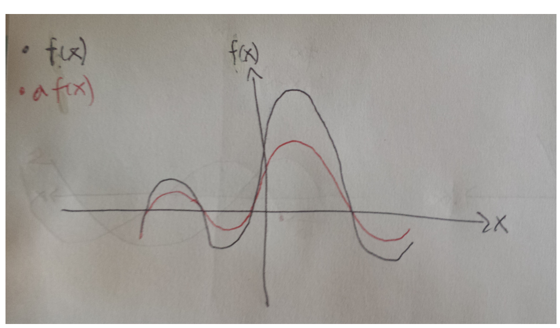
- $f(x) = x$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \mathrm{sen}(x)$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x)$

Entre otras, pero estas son las más importantes que hay que saber graficar. Antes de empezar a graficar funciones más complicadas, hay que tener en cuenta que casi todas vienen de estas "funciones madres", ya que no son mas que traslaciones y escalamientos de estas.

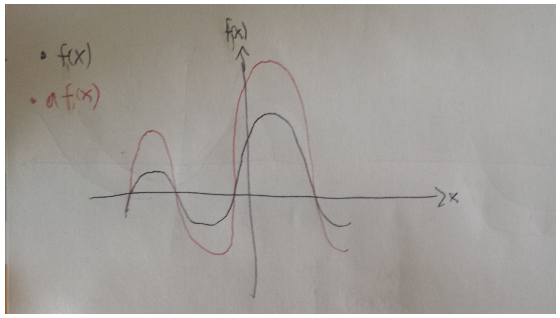
2.1. Escalamientos de funciones

La pregunta acá, es ver qué pasa si tenemos alguna de las funciones madres multiplicada por alguna constante, de tal manera que tenemos una función de la forma $af(x)$, donde a es la constante. Veamos algunos casos para $a > 0$

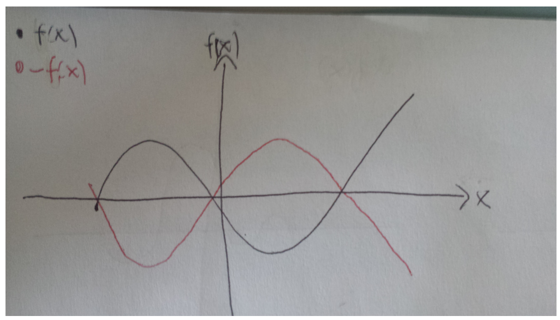
- $0 < a < 1$:



- $a > 1$



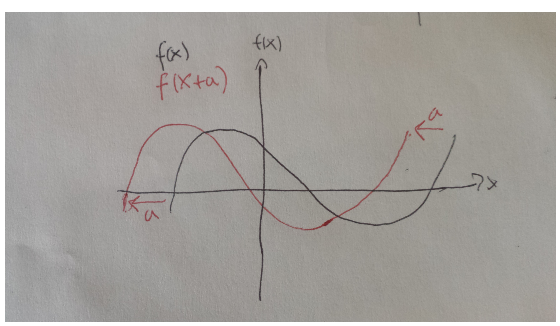
En el caso en que el valor sea negativo, primero veamos el comportamiento de $-f(x)$: la función se refleja con respecto al eje x. Por lo tanto, si $a < 0$, basta hacer primero el paso anterior, y después exactamente lo mismo que lo mostrado en los gráficos anteriores dependiendo de como sea a.



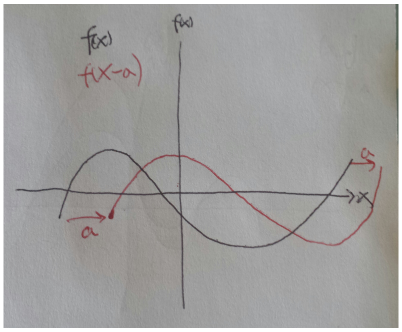
2.2. Traslaciones de funciones

Vamos a ver que es distinto graficar una función, que se le está sumando/restando una constante en el argumento, en comparación si se le está sumando/restando fuera de este:

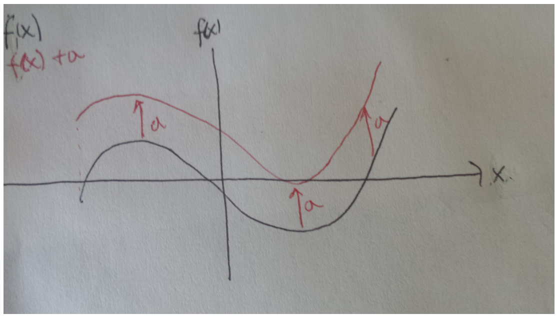
- Cuando tenemos $f(x + a)$, con $a > 0$, el resultado obtenido, va a ser la función madre f desplazada a unidades hacia la izquierda, es decir:



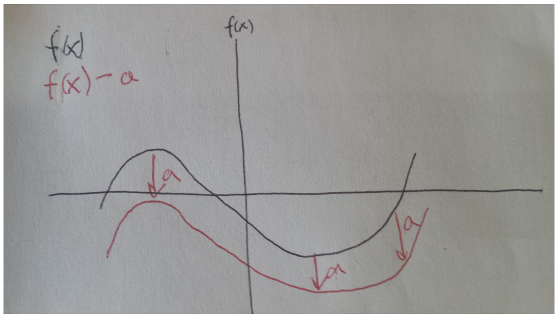
- Cuando tenemos $f(x - a)$, con $a > 0$, el resultado obtenido, va a ser la función madre f desplazada a unidades hacia la derecha, es decir:



- Cuando tenemos $f(x) + a$, con $a > 0$, el resultado obtenido, va a ser la función madre f desplazada a unidades hacia arriba, es decir:



- Cuando tenemos $f(x) - a$, con $a > 0$, el resultado obtenido, va a ser la función madre f desplazada a unidades hacia abajo, es decir:



Ejemplo: Sea $f(x) = -(x-1)^2 + 3$. Grafique f:
Para graficar esta función, podemos ver que es una función que está escalonada y trasladada, por lo que primero habrá que identificar la función madre y después ver los escalamientos y luego las traslaciones hasta llegar a la función pedida. En resumen:

1. Ver función madre: Se puede notar que es la función x^2
2. Ver $-x^2$
3. Notar que $-(x-1)^2$ corresponde a una traslación hacia la derecha de la función anterior
4. Finalmente llegar a $-(x-1)^2 + 3$ que corresponde a una traslación hacia arriba de la función anterior.

Graficando: