

Resolución Aux #2 Logica y Conjuntos

P11

$P(x)$: x es par

$q(x)$: x es múltiplo de 5

$r(x)$: $x \geq 8$

a) $\forall x \in \mathbb{N} : (P(x) \vee r(x)) \Leftrightarrow F$

Es falso debido a que por ejemplo se toma $x=3$, no es par ni mayor que 8 (o igual), por lo que encuentro un CONTRA EJEMPLO!. También serviría $x=1$ o $x=5$ o $x=7$.

b) $\exists n \in \mathbb{N} : (r(n) \Rightarrow q(n)) \Leftrightarrow V$

Nos interesa el caso $(V \Rightarrow ?)$. Como es habitual, entonces la misión será encontrar al menos un número Natural que haga que $r(n) \Leftrightarrow V$ y $q(n) \Leftrightarrow V$ al mismo tiempo.

$r(n)$ pide que el número sea mayor o igual que 8 y $q(n)$ pide que sea múltiplo de 5, considerando ambas podemos tomar $n=10$ o $n=15$ o $n=20$ o...

Como encontramos al menos uno, la proposición junto con el cuantificador de existencia $\exists$ es Verdadera.

$$c) \forall n \in \mathbb{N}: [p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(n))] \Leftrightarrow F$$

Encontramos un contraejemplo, para que $p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(n))$ sea Falso, se debe cumplir que $[p(n) \Leftrightarrow V]$ y que $q(n) \vee r(n) \Leftrightarrow F$, como hay un "V"

$\Rightarrow [q(n) \Leftrightarrow F]$ y $[r(n) \Leftrightarrow F]$, luego el contraejemplo debe cumplir con los valores de verdad encerrados.

Considerando esto, podemos tomar $n=2$ o $n=4$ de esta forma

$$p(2) \Leftrightarrow 2 \text{ es par} \Leftrightarrow V$$

$$q(2) \Leftrightarrow 2 \text{ es múltiplo de } 5 \Leftrightarrow F$$

$$r(2) \Leftrightarrow 2 \text{ es mayor o igual que } 8 \Leftrightarrow F$$

Luego la proposición es Falsa.

P2) a) $\sim(\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : e \geq x \geq \pi$

b) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : [(x+y) \text{ es par} \Rightarrow (x \text{ es par} \wedge y \text{ es par})])$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x+y) \text{ es par} \wedge (x \text{ no es par} \vee y \text{ no es par})$

obs: Cada cuantificador se niega

c) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : (x < y \Rightarrow x+z=y))$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} : x < y \wedge x+z \neq y$

$$d) \neg (\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} : \underbrace{nm > 2}_p \Leftrightarrow \underbrace{(2n+m \geq 1)}_q)$$

$$(2) [\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{N} : \underbrace{nm > 2}_p \Leftrightarrow \underbrace{(2n+m < 1)}_{\sim q}]$$

o bien podría ser

$$[\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{N} : \underbrace{nm \leq 2}_{\sim p} \Leftrightarrow \underbrace{(2n+m \geq 1)}_q]$$

o bien podría ser

$$[\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{N} : \underbrace{(nm \leq 2)}_{\sim p} \wedge \underbrace{(2n+m \geq 1)}_q] \vee \underbrace{[(nm > 2)_p \wedge \underbrace{(2n+m < 1)}_{\sim q}]}_{\sim q}$$

$$\boxed{P3} \quad (\forall x)(\exists y)(p(x) \Rightarrow p(y)) \Leftrightarrow V$$

Es verdadera ya que ...

Demostración:

En efecto, SEA x CUALQUIERA! tal que $\overline{p(x) \in V}$ debemos encontrar un "y" para que la implicación nos quede de la forma $V \Rightarrow V$, por el momento solo tenemos $V \Rightarrow p(y)$.

En este caso podemos tomar $y = x$, luego $p(y) \Leftrightarrow p(x) \Leftrightarrow V$

Por lo tanto llegamos al caso $V \Rightarrow V$, por lo que la proposición es verdadera

$$(\exists y)(\forall x) p(x) \Rightarrow p(y)$$

Veamos dos casos, Cuando $(\exists y) p(y) \Leftrightarrow V$

y cuando $(\exists y) p(y) \Leftrightarrow F$

Caso 1 Si $(\exists y) p(y) \Leftrightarrow V$ la implicancia nos queda de la forma $p(x) \Rightarrow V$, Luego independiente del valor que tome $p(x)$, la implicancia siempre sera Verdadera

Caso 2 Si $(\exists y) p(y) \Leftrightarrow F$ la implicancia nos queda de la forma $p(x) \Rightarrow F$, aqui dependemos del valor de $p(x)$, para encontrar el valor de verdad de $p(x)$, Volvamos a la hipotesis tomada.

Si $(\exists y) p(y) \Leftrightarrow F$ esto quiere decir

"No existe 'y' tal que, haga que $p(y)$ sea Verdadero"
en otras palabras ...

"Toma cualquier 'y', luego $p(y)$ siempre sera Falso"

Por lo tanto si dentro de los "Cualquier y", tomo el valor "x" se obtiene que $p(x) \Leftrightarrow F$

Luego estamos en el caso

$$F \Rightarrow F$$

Por lo tanto la proposición es verdad.

P4 | por demostrar que (se abrevia pda)

$$a) (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

obs: Como es una igualdad debemos pasar de un lado a otro

= Demostración: empecemos de la pza y lleguemos a la der

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \Delta C &= [(A \Delta B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \Delta B)] \\ &= [(A \Delta B) \cap C^c] \cup [C \cap (A \Delta B)^c] \quad \begin{array}{l} A \setminus B = A \cap B^c \\ \Rightarrow A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \end{array} \\ &= [[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap C^c] \cup [C \cap [(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)]] \quad \text{Distributiva} \\ &= [(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c)] \cup [(C \cap A \cap B) \cup (C \cap A^c \cap B^c)] \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (C \cap A \cap B) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B) \\ &= [A \cap [(B^c \cap C^c) \cup (C \cap B)]] \cup [A^c \cap [(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)]] \\ &= [A \cap (B \Delta C)^c] \cup [A^c \cap (B \Delta C)] \\ &= [A \setminus (B \Delta C)] \cup [(B \Delta C) \setminus A] \\ &= A \Delta (B \Delta C) \end{aligned}$$

Asociatividad
y
conmutatividad

⊛



5

Problemas (★)

$$\begin{aligned}(A \Delta B)^c &= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)]^c && \} \text{ Definición} \\ &= [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c]^c && \} \text{ Def de Resta} \\ &= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) && \} \text{ Morgan Con Complemento} \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)\end{aligned}$$



b) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

Problemas primero que se $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap C^c = A$

Asumamos hipótesis $A \cap C = \emptyset \quad / \quad \cup A^c$

$$\Rightarrow (A \cap C) \cup A^c = \emptyset \cup A^c$$

$$\Leftrightarrow (A \cup A^c) \cap (C \cup A^c) = A^c$$

$$\Leftrightarrow U \cap (C \cup A^c) = A^c$$

$$\Leftrightarrow C \cup A^c = A^c$$

$$\Leftrightarrow (C \cup A^c)^c = (A^c)^c$$

$$\Leftrightarrow C^c \cap A = A$$

$$\Leftrightarrow A \cap C^c = A \quad \swarrow \text{conmutatividad}$$

Ahora probemos la igualdad $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

Partamos de la izquierda

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B^c) \cap C^c$$

$$\} A \setminus B = A \cap B^c$$

Por Hipotesis
y usando lo
mostrado

$$\begin{aligned} &= A \cap C^c \cap B^c \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

} Conmuta

Por hipotesis
 $\emptyset = A \cap C$

$$\begin{aligned} &= (A \cap B^c) \cup \emptyset \\ &= A \cap B^c \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

} le agrego "NADA" y
se mantiene la igualdad

$$= A \cap (B^c \cup C)$$

$$= A \cap (B \cap C^c)^c$$

$$= A \setminus (B \cap C^c)$$

$$= A \setminus (B \setminus C)$$



c) $(B \setminus A) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$

USANDO LA PROPIEDAD $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$ SE TIENE QUE

$$(B \setminus A) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (B \setminus A)^c$$

$$\Leftrightarrow C^c \subseteq (B \cap A^c)^c$$

$$\Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$$



$$d) A \subseteq A^c \Leftrightarrow A = \emptyset$$

Separaremos en dos implicancias

$$\bullet A \subseteq A^c \Rightarrow A = \emptyset$$

$$\text{Si } A \subseteq A^c \quad / \cap A$$

$$\Rightarrow A \cap A \subseteq A^c \cap A$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq \emptyset \quad \text{y como } \emptyset \subseteq A$$

$$\text{Se tiene que } A \subseteq \emptyset \wedge \emptyset \subseteq A \Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$\bullet A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq A^c$$

$$\text{Si } A = \emptyset \Rightarrow A^c = U$$

$$\text{Luego es directo que } \emptyset \subseteq U$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq A^c$$

∴ Ambas implicancias son verdaderas, luego $A \subseteq A^c \Leftrightarrow A = \emptyset$

e) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

Asumamos hipótesis, es decir, supongamos que $A \cap B = A \cup B$
y Concluamos que $A = B$.

Sin embargo en vez de demostrar $A = B$, demostraremos
una proposición equivalente $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Luego debemos demostrar 2 cosas, que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$

Demostración:

$A \subseteq B$ Sea x cualquiera en A , es decir, $x \in A$ cualquiera

$$\begin{aligned} \text{si } x \in A &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \quad \downarrow \text{ ya que } A \cup B = A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \end{aligned}$$

en particular $\Rightarrow x \in B$

Luego tenemos que $x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$

$B \subseteq A$ Análogamente, sea $y \in B$ cualquiera

$$\begin{aligned} \text{si } y \in B &\Rightarrow y \in A \vee y \in B \Leftrightarrow y \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow y \in A \cap B \quad \downarrow \text{ ya que } A \cup B = A \cap B \\ &\Leftrightarrow y \in A \wedge y \in B \end{aligned}$$

en particular $\Rightarrow y \in A$

Luego tenemos que $y \in B \Rightarrow y \in A \Leftrightarrow B \subseteq A$

∴ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ que es lo mismo que $A = B$ $\square$

f) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

Partamos de la izquierda

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cup B^c) &= A \cup (B \cap B^c) \quad \dots \text{factorizamos} \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A\end{aligned}$$

$\square$

g) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = A^c \cup B$

Partamos de la izquierda

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) &= (A \cap B) \cup [(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)] \quad \dots \text{Asociamos} \\ &= (A \cap B) \cup [A^c \cap (B \cup B^c)] \quad \dots \text{factorizo} \\ &= (A \cap B) \cup [A^c \cap \mathcal{U}] \quad \dots B \cup B^c = \mathcal{U} \\ &= (A \cap B) \cup A^c \quad \dots A^c \cap \mathcal{U} = A^c \\ &= (A \cup A^c) \cap (B \cup A^c) \quad \dots \text{Distribuir} \\ &= \mathcal{U} \cap (B \cup A^c) \quad \dots A \cup A^c = \mathcal{U} \\ &= B \cup A^c\end{aligned}$$

$\square$

Obs. Si tengo solo uniones puedo manejar los
Parentesis Como Quiero

P5 Sea $C = (A \cup B)^c$, probar que $(A \Delta B) \Delta C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

debemos probar una equivalencia, en este caso partiremos del lado izquierdo y a través de sub equivalencias llegaremos a la derecha.

Supongamos que $(A \Delta B) \Delta C = A \cup B \cup C$

Calculemos $\mathcal{D}$ y $\mathcal{P}$ por separado ... con $C = (A \cup B)^c$

$$\mathcal{D} = A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup (A \cup B)^c = \mathcal{U}$$

esto unido con su complemento $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{U}$

Por otro lado

$$\mathcal{P} = (A \Delta B) \Delta C = (A \Delta B) \Delta (A \cup B)^c$$

+ trabajar con $\left\{ \begin{array}{l} \star \\ \otimes \end{array} \right\}$

$$= \underbrace{[(A \Delta B) \setminus (A \cup B)^c]}_{\star} \cup \underbrace{[(A \cup B)^c \setminus (A \Delta B)]}_{\otimes}$$

$A \Delta B$ y $\star$ sera visto despues

$$= A \Delta B \cup (A \cup B)^c$$

$$= [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c] \cup (A \cup B)^c$$

$$= [(A \cup B) \cup (A \cup B)^c] \cap [(A \cap B)^c \cup (A \cup B)^c]$$

$$= \mathcal{U} \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cap B)^c$$

Luego $\emptyset = (A \cap B)^c$ y $\emptyset = \cup$

Como $\emptyset = \emptyset$

$$\Rightarrow (A \cap B)^c = \cup \quad ()^c$$

$$\Rightarrow ((A \cap B)^c)^c = \cup^c$$

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \quad \text{que era a lo que queríamos llegar}$$

Problemas $\star$, es decir, $(A \Delta B) \cap (A \cup B)^c = A \Delta B$

En efecto, es directo pues $A \Delta B \subseteq A \cup B$ y

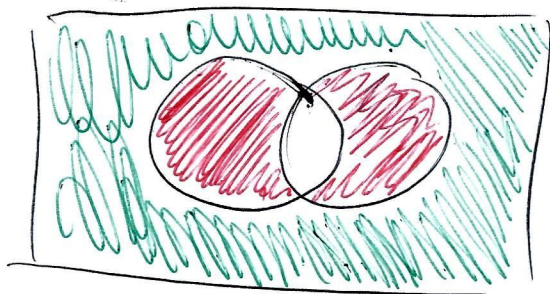
$A \cup B$ no se interseca con $(A \cup B)^c$ luego

si a $A \Delta B$ le resto $(A \cup B)^c$ no le quito nada

Problemas $\star$, es decir, $(A \cup B)^c \cap A \Delta B = (A \cup B)^c$

Es el mismo argumento, si a $(A \cup B)^c$ le resto

$A \Delta B$ no le quito nada



$A \Delta B$

$(A \cup B)^c$

Rosjo y verde
no se tocan!