

Escuela de Verano

FM1002-2 Matemática II: Fundamentos del álgebra abstracta

Profesor: Benjamín Ruiz**Auxiliares:** Pablo Araya, Jipi

Guía 1

P1. Demuestre que $(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x)(p(x))]$ es tautología.

P2. Demuestre que si $(\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$, entonces $P(x)$ es siempre verdadera o siempre falsa.

P3. Muestre que las proposiciones

$$r : (\forall x)(\exists y)(p(x) \Rightarrow p(y))$$

$$s : (\exists y)(\forall x)(p(x) \Rightarrow p(y))$$

Son ambas verdaderas para cada función proposicional de p .

P4. Negar la definición de existencia y unicidad:

$$(\exists!x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)]$$

P5. Negar las siguientes proposiciones:

i $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

ii $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$

iii $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x < y$

iv $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$

v $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : [(x + y) \text{ es par} \Rightarrow (x \text{ es par} \wedge y \text{ es par})]$

vi $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x < y \wedge x^2 \geq y)$

vii $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : (x < y \Rightarrow x + z = y)$

viii $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (3x + y) \text{ es par}$

ix $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : (2x + y = 5 \Rightarrow x \cdot y < 2)$

x $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} : [(n \cdot m > 2) \Leftrightarrow (2n + m \geq 1)]$

P6. Considere las funciones proposicionales:

$$p(x, y) : x - y > 1$$

$$q(x, y) : 2x + 3y < 2$$

Así como los conjuntos $A = \{2, 1, -1, 3\}$, $B = \{-4, 1, -1/2\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $\exists x \in A, \forall y \in B : p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$

(b) $\forall x \in B, \forall y \in A : p(x, y) \vee q(x, y)$

(c) $\exists x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y)$

(d) $\forall x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \wedge q(x, y)$

(e) $\forall x \in B, \exists y \in B : q(x, y)$

(f) $\forall x \in B, \exists y \in A : q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$

P7. Sea $p(x, y)$ una proposición abierta dependiente de x e y . Considere la siguiente proposición lógica:

$$(\exists x)(\forall y)p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x, y)$$

Justifique la veracidad de ésta. Indique un caso particular de proposición abierta $p(x, y)$ que haga falsa la proposición recíproca, es decir:

$$(\forall y)(\exists x)p(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)p(x, y)$$

P8. Sea p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional:

(a) Si llamamos r a la proposición $(\forall x)(p \Rightarrow q(x))$, determine el valor de verdad de p sabiendo que r es falsa. Justifique.

(b) Llamemos ahora s a la proposición $(\exists x)(p \Rightarrow q(x))$. Decida si es posible determinar el valor de verdad de p sabiendo que s es verdadera. Justifique.

P9. Uno de los lugares favoritos del abuelo Anacleto, matemático y aventurero, es el mítico país de los caballeros y los bribones. Los caballeros siempre dicen la verdad y los bribones siempre mienten, también hay hombres que a veces mienten y a veces no.

Un día, el abuelo se encontró con tres personas: Emilio, Sebastián y Michelle. Uno de ellos es caballero(a), el otro bribón(ona) y el otro normal, pero no sabe cuál es cuál. Ellos dicen lo siguiente:

Emilio : Yo soy normal

Sebastián : Lo que dice Emilio es verdad

Michelle : Yo no soy normal

¿Qué son Emilio, Sebastián y Michelle?

P10. El abuelo Anacleto, famoso matemático y aventurero, a caído en manos de una tribu. Los miembros de la tribu le dan a elegir entre morir envenenado o morir en la hoguera. El abuelo es obligado a pronunciar una frase (proposición), si el abuelo dice una frase que es cierta será envenenado y si dice una frase que es mentira será quemado en la hoguera. ¿Cómo puede nuestro querido abuelo librarse de las manos de la tribu?

P11. Pruebe que todos los elefantes rosados saben manejar un auto