Escuela de Verano
FM1002-2 Matemática II: Fundamentos del álgebra abstracta
Profesor: Benjamín Ruiz
Auxiliares: Pablo Araya, Jipi

Auxiliar 1

Bienvenidos a la EdV!

P1. (a) Considere el conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$ Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones y niéguelas:

i. $(\forall x \in A)(\forall y \in A) x + y \leq 1$

ii. $(\forall x \in A)(\exists y \in A) x^2 \leq y$

(b) Demuestre que:

$$(\forall \epsilon \geq 0, |a| \leq \epsilon) \Rightarrow a = 0$$

(c) Demuestre que:

$$(\forall \epsilon > 0, |a| \leq \epsilon) \Rightarrow a = 0$$

Para esto, niegue la proposición y llege a algún absurdo. Indicación: $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$

P2. Los luctuosos hechos acaecidos en la mansión de Beauchef han conducido a la brigada de homicidios a detener a 3 sicarios sospechosos de deleznable crimen. Para no enlodar a las inocentes familias de los susodichos, en lo que sigue nos referiremos a ellos anónimamente como S_1, S_2 y S_3. Durante el interrogatorio las declaraciones de los sospechosos fueron las siguientes:

S_1 : "S_2 es culpable y S_3 es inocente"

S_2 : "Si S_1 es culpable, entonces S_3 es culpable"

S_3 : "Yo soy inocente, pero alguno de los otros dos también es culpable"

Suponiendo que los inocentes dijeron la verdad y los culpables mintieron, determine quienes son culpables. Justifique su respuesta.

P3. Sea F un conjunto de personas que están esperando en una fila de un banco para ser atendidas. Para x e $y \in F$ se define:

$$\phi(x, y) : \text{La persona } x \text{ está más adelante que la persona } y$$

Considere $p \in F$ una persona en la fila. Indique, justificando, la posición de dicha persona:

(a) $\forall x \in F \ [\phi(p, x) \vee x = p]$

(b) $\forall x \in F \ [\phi(x, p) \vee x = p]$

(c) **[Propuesto]**$\exists! x \in F \ [\phi(x, p) \veebar \phi(p, x)]$

Nota 1: Se define $r \veebar s \Leftrightarrow (r \vee s) \wedge \sim (r \wedge s)$
Nota 2: $\exists! p(\cdot) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[(p(x) \wedge (y) \Rightarrow x = y]$

P4. Sea $r(x)$ y $s(x)$ dos funciones proposicionales. Considere las siguientes proposiciones:

$$p : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x \geq y$$
$$q : (\forall x)[r(x) \Rightarrow \exists y \ s(y)]$$

(a) ¿Es p verdadero o falso?

(b) Niegue p

(c) Niegue q

P5. [**Propuesto**] Se tienen 9 bolas idéntica, pero una de ellas es más pesada que las demás. El abuelo Anacleto, famoso matemático y aventurero que también es un coleccionista, tiene una balanza de dos platos con la cuál nos puede ayudar pero sólo nos deja pesar dos veces. ¿cómo podemos descubrir la bola infiltrada?

P6. [**Propuesto**] El abuelo Anacleto busca un matemático joven para que sea su sucesor en la Universidad de Chile. Decide poner a prueba a 3 jóvenes: Marge Simpsons, el tío Cosa y Philips J. Fry.

El abuelo Anacleto dispone de 5 sombreros, 3 blancos y 2 negros. A cada uno de los participantes les venda los ojos y les coloca un sombrero, luego los envía a los 3 a una misma habitación, completamente vacía, sin espejos ni nada que pueda reflejar, y les pide que se saquen la venda y que se ubiquen formando un triángulo, de modo que cada uno no pueda ver su propio sombrero pero sí pueda ver a los otros dos. El primero que diga correctamente de qué color es su sombrero, será el que se quede con el puesto de sucesor del abuelo.

Al cabo de un rato el tío Cosa exclama ”sijifiaisjisij” (mi sombrero es blanco).

Explique el razonamiento del tío Cosa que le permitió ser el sucesor del gran Abuelo Anacleto.