

Aux 13

P1) Pdg $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8$ no Converge

Usaremos la contradicción. Es decir asumiremos que converge y veremos que esto no puede ocurrir

En efecto, supongamos que converge a un número $l \in \mathbb{R}$, es decir que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |n^8 - l| < \epsilon$$

veamos lo sgte $\forall n \geq n_0 \quad |n^8 - l| < \epsilon$ ↓ Hint

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |n^8| - |l| < |n^8 - l| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |n^8| < \epsilon + |l|$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad n^8 < \epsilon + |l|$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad n < \sqrt[8]{\epsilon + |l|}$$

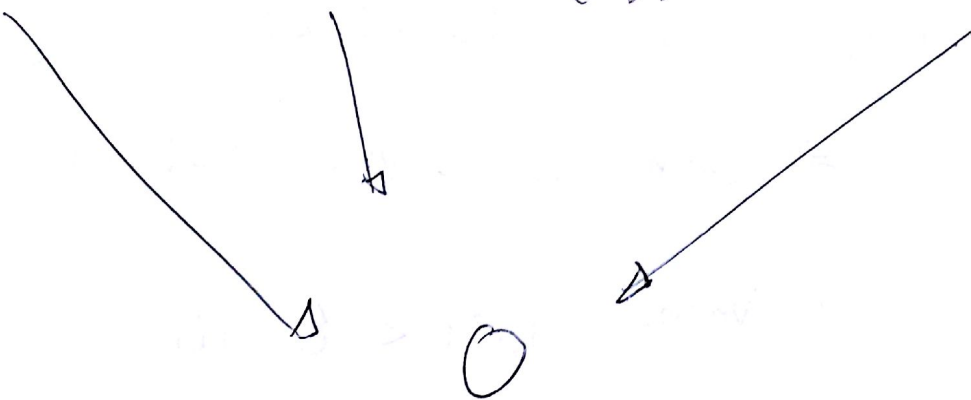
¿Esto puede pasar? No! ya que si digo que hay un número (en este caso $\sqrt[8]{\epsilon + |l|}$) que es mayor que cualquiera de los naturales, estoy diciendo que los naturales son acotados, y por lo que sabemos los naturales son infinitos

Luego llegamos a una contradicción y concluimos que la única opción es que la sucesión

$(n^8)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge

P2) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Por Sandwich

$$0 < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \left/ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \right.$$


$\therefore$ Por Sandwich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 0$

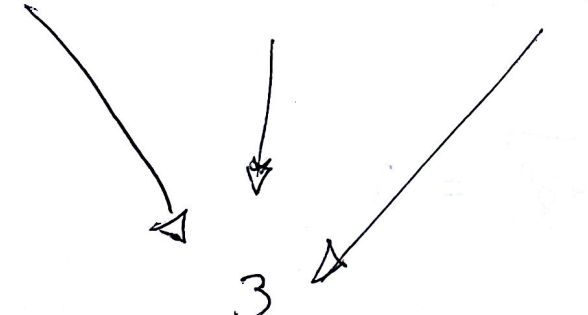
(2) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

For Sandwich

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n$$

$$\Leftrightarrow 3^n < 2^n + 3^n \leq 2 \cdot 3^n \quad / \sqrt[n]{}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{3^n}$$

$$\Leftrightarrow 3 < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < 3 \cdot \sqrt[n]{2} \quad / \lim_{n \rightarrow \infty}$$


$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

Por sandwich, supongamos que $a > b > 0$

$$\Rightarrow a^n < a^n + b^n < 2a^n \quad / \sqrt[n]{}$$

$$(2) \sqrt[n]{a^n} < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{a^n}$$

$$(2) a < \sqrt[n]{a^n + b^n} < a \sqrt[n]{2} \quad / \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$a$$

$$\therefore \text{ si } a > b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$$

análogamente

$$\text{ si } b > a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max \{a, b\}$$

P3) a) $u_n = \frac{n^n}{n! \cdot e^n}$

Calculemos $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot e^{n+1}}}{\frac{n^n}{n! \cdot e^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot e^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot e^n}{n^n}$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot e^n}{n^n \cdot \cancel{(n+1)!} \cdot \cancel{e^n} \cdot e}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\leq \frac{1}{e} \cdot e = 1$$

$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

$\therefore (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente

Para ocupar el teorema de sucesiones monotonas, falta ver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado inferiormente,

Como $u_n = \frac{n^n}{n! e^n}$ se tiene que como $n > 0$
 $n^n > 0$, $n! > 0$ y $e^n > 0$

$$\therefore u_n = \frac{n^n}{n! e^n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↘ Cota inferior

Luego, encuentre una cota inferior, por lo tanto $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado inferiormente y por ser decreciente el teorema de sucesiones monotonas me asegura que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente

$$4) \quad a_0 = 0 \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pdq: $0 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Inducción

→ caso base: $n=0$, evaluando $a_0 = 0$ y luego $0 \leq a_0 = 0 \leq 2$ ✓

Luego $n=0$ se cumple

→ hipótesis inductiva: para algún $n \geq 0$, $0 \leq a_n \leq 2$

→ pdq: $0 \leq a_{n+1} \leq 2$

Veamos que $0 \leq a_{n+1}$

Por HI, $0 \leq a_n \leq 2$, en particular, $0 \leq a_n$

$$\Rightarrow 0 \leq a_n + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2 \leq a_n + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a_n + 2 \quad / \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a_n + 2} = a_{n+1}$$

Veamos que $a_{n+1} \leq 2$

Por H.I., sabemos que $0 \leq a_n \leq 2$, en particular

$$a_n \leq 2 \quad / +2$$

$$\Rightarrow a_n + 2 \leq 4 \quad / \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a_n + 2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq a_{n+1} \leq 2$$

Luego, por inducción $0 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ //

⊗ Para ver que converge, veamos que es monótona creciente

Pda) (a_n) es creciente, es decir $a_{n+1} \geq a_n$

Analizamos $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (\sqrt{a_n + 2})^2 - a_n^2$

$$= a_n + 2 - a_n^2$$

$$= (2 - a_n)(1 + a_n) \geq 0$$

$$\begin{array}{cc} \geq 0 & \geq 0 \\ a_n \leq 2 & a_n \geq 0 \end{array}$$

Luego $a_{n+1}^2 - a_n^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 \geq a_n^2$ Como $a_n > 0$, aplicamos $\sqrt{}$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

$\therefore (a_n)$ es creciente

Luego (a_n) es creciente y es acotada superiormente por teorema de Sucesiones monotonas, (a_n) es convergente

*) Para calcular el limite, como (a_n) es convergente, esto quiere decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ con $l \in \mathbb{R}$, luego tomamos la recurrencia

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \quad / \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n}$$

$$l = \sqrt{2+l} \quad |()^2$$

$$l^2 = 2+l$$

$$\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow (l-2)(l+1) = 0$$

$\rightarrow l = 2 \text{ o } l = -1$
como $a_n \geq 0 \Rightarrow l = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$