

# Resumen

→ Convergencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) |S_n - l| < \varepsilon$$

## ! TEOREMA

El límite de una sucesión convergente es único

→ Sucesión nula:

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se llamará sucesión nula si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$

→ Sucesión acotada:

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) |S_n| \leq M$$

Esto quiere decir que existe un número que es mayor que cualquier valor que tome la sucesión

Ejemplo:  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotado ya que

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

Por ejemplo el 2 acota a cualquier elemento

## TEOREMAS

1) Si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente  $\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada

obs: Si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada  $\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no converge

2) Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión nula y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada  $\Rightarrow (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión nula

*NULA  $\times$  Acotada*

3) Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son acotadas  $\Rightarrow (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son acotadas

4) Álgebra de límites

$$\rightarrow \lim (a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$$

$$\rightarrow \lim (a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$$

$$\rightarrow \lim (\lambda a_n) = \lambda \lim(a_n) \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

$$\rightarrow \lim \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} \quad \text{con } \lim b_n \neq 0$$

## Teorema de sucesiones monotonas

→ Si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente y acotada superiormente  $\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y el límite es el supremo de los valores que puede tomar, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup \{ S_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \}$$

→ Si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente y acotada inferiormente  $\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y el límite es el ínfimo de los valores que puede tomar, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \inf \{ S_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \}$$

## Límites importantes

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} > 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } |q| < 1 \\ \text{no existe o bien es } +\infty & \text{si } |q| > 1 \end{cases}$$

---

## Propiedad Arquimediana

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad 1 < \varepsilon \cdot n_0$$

---

## Sandwich

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$  y además  $\forall n \geq n_0$

$$a_n < S_n < b_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$$

## Trucos para resolver problemas

1) Si piden demostrar por definición, es decir

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |s_n - l| < \varepsilon$$

Se empieza estudiando  $|s_n - l|$ , aquí hay

2 caminos

a) encontrar  $n_0$ , aquí pueden empezar resolviendo

$$|s_n - l| < \varepsilon$$

Para luego despejar  $n$ , así llegamos a

$$n > \text{Algo con } \varepsilon$$

$$\Rightarrow n_0 = \lfloor \text{Algo con } \varepsilon \rfloor + 1$$

También si es muy difícil despejar  $n_0$ , entonces

Traten de tomar  $|s_n - l|$  y empiezan a acotar

Luego en alguna expresión imponen la desigualdad

con  $\varepsilon$  y despejan  $n_0$

b) Prop. Arquimediana, la idea es la misma, analicen  
Solo  $|S_n - l|$ , traten de acotar y llegar a algo del  
estilo " $\frac{\text{Algo}}{n} < \varepsilon$ " esto sera verdadero en  
virtud de la prop. Arquimediana

---

Para el calculo de limites tratar de usar

→  $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$  "multiplicar por 1"

→ en raíces Cuadradas racionalizar

→ en sumatorias tratar de acotar y Sandwich

→ Astucia y Suerte