

$$\text{P1) a) } \text{pda } (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad (*)$$

En efecto, encontremos el n_0 , para eso veamos la sgte desigualdad

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2n - (2n+1)}{4n+2} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2n - 2n - 1}{4n+2} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{4n+2} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 4n+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 2 < 4n \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right) < n$$

luego analizemos la desigualdad

$$n > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right)$$

$$\Rightarrow n_0 = \left\lfloor \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right) \right\rfloor + 1$$

"a partir de este número, la proposición $\textcircled{P}$ es verdad"

$$\circ \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}, \text{ donde } n_0 = \left\lfloor \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right) \right\rfloor + 1$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$$

$$\text{pdg } (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \left| \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\text{En efecto, } \left| \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\text{Como } 1 < \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \\ \Rightarrow 0 < \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 < \varepsilon \quad / +1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{1}{n} + 1} < \varepsilon + 1 \quad / ()^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} + 1 < (\varepsilon + 1)^2$$

¡ojo! Como los elementos en la desigualdad son positivos, elevar al cuadrado es una equivalencia

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < (\varepsilon + 1)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2 - 1} < n$$

$$\therefore n_0 = \left\lfloor \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2 - 1} \right\rfloor + 1$$

$$\text{Luego } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$$

P2 a) Recordo

" Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada "

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + n}{na_n^2 + 1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + \frac{n}{n}}{\frac{na_n^2}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + 1}{a_n^2 + \frac{1}{n}}$$

Por algebra de
Límites

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

PROARTE

a_n es acotada
 $\frac{1}{n}$ es nula

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

$$= \frac{0 + 1}{1 \cdot 1 + 0} = \frac{1}{1^2}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n k - \frac{n}{2}}{n+2}$$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2}}{n+2}$$

} Resta de fracciones

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - n}{2(n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2 - 2n}{2n+4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+4} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

racionalizemos

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Por la pregunta 1
parte b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

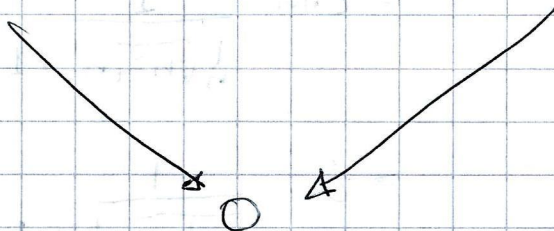
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Sen}(n)}{n}$

Por sandwich

Sabemos que $-1 < \operatorname{Sen}(n) < 1$ $\quad / \cdot \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n} < \frac{\operatorname{Sen}(n)}{n} < \frac{1}{n}$ $\quad / \lim_{n \rightarrow \infty}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Sen}(n)}{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$



$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Sen}(n)}{n} = 0$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+n} \right)^2$$

Por Sandwich, recuerden que si tengo $k > 0, n > 0$

$$\frac{1}{k+n}$$

y quiero encontrar una cota superior puedo quitar un término de la suma denominador

Por ejemplo $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} < \frac{1}{1} = 1$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3+2} < \frac{1}{2}$$

Luego $\frac{1}{k+n} < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow 0 < \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+n} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+n} \right)^2 = 0$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

Por sandwich

recordemos $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

y ocupando

$$n-1 < n$$

$$n-2 < n$$

$$n-3 < n$$

$$\vdots$$

$$3 < n$$

$$2 < n$$

$$\Rightarrow n! = \overset{< n}{n} \overset{< n}{(n-1)} \overset{< n}{\dots} \overset{< n}{3} \cdot 2 \cdot 1 \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n \cdot 1}_{(n-1) \text{ veces}} \\ = n^{(n-1)} \cdot 1 = n^{(n-1)}$$

Luego tenemos que

$$0 < n! < n^{(n-1)} \quad / \quad \frac{1}{n^n}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

P3 Sea $a \in (0, 1)$, $(a_n)_{n \geq 1}$

$$a_1 = a \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$$

a) Pdg $\forall x \in \mathbb{R} \quad x(2-x) \leq 1$

En efecto, consideremos lo siguiente

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-1)^2 \geq 0$$

Pues todo número al cuadrado es no negativo

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \geq 2x - x^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \geq x(2-x) //$$

b) p.d.g. $\forall n \geq 1 \quad a_n \in (0, 1)$

→ Caso base $n=1$

evaluando en a_n

⇒ $a_1 = a$ por enunciado $a \in (0, 1)$

luego $a_1 \in (0, 1)$ //

⇒ Hipótesis inductiva: Para algún $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \in (0, 1)$$

→ p.d.g. $a_{n+1} \in (0, 1)$

En efecto, por HI se tiene que

$$0 < a_n < 1 \quad / \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow -1 < -a_n < 0 \quad / +2$$

$$\Rightarrow 0 < 1 < 2 - a_n < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2 - a_n \quad / \cdot a_n$$

$$\Leftrightarrow 0 < a_n(2 - a_n)$$

Luego por la parte P3 a Sabemos que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x(2-x) \leq 1$$

evaluando $x = a_n$

$$\Rightarrow a_n(2-a_n) \leq 1$$

y antes teníamos que

$$0 < a_n(2-a_n)$$

$$\Leftrightarrow 0 < a_n(2-a_n) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < a_n(2-a_n) < 1$$

Como $a_n \in (0, 1)$,
esto pues le igualda
se alcanza en $a_n = 1$
pero $a_n < 1$

$$\Leftrightarrow 0 < a_{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \in (0, 1)$$

$$\therefore (a_n)_{n \geq 1} \quad a_n \in (0, 1), \quad \forall n \geq 1$$

c) Pdg $(a_n)_{n \geq 1}$ es estrictamente creciente, es decir que $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \geq 1$

En efecto; analicemos la diferencia $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n = a_n(2 - a_n) - a_n = a_n((2 - a_n) - 1)$$

Definición

$$a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$$

$$= a_n(2 - a_n - 1)$$

$$= a_n(1 - a_n)$$

Como $1 > a_n > 0$, en particular $\boxed{a_n > 0}$ y además

$$1 > a_n$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - a_n > 0}$$

$$\text{Luego } a_{n+1} - a_n = \underbrace{a_n}_{>0} \underbrace{(1 - a_n)}_{>0} > 0$$

$$\text{Luego } a_{n+1} - a_n > 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

d) finalmente. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y esta acotada superiormente por teorema de sucesiones monótonas el límite existe, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \text{con } l \in \mathbb{R}$$

Para calcular "l", ocuparemos la definición de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que

$$a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \quad \left/ \quad \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim a_n(2 - a_n)$$

$$\Leftrightarrow l = l(2 - l)$$

$$\Leftrightarrow l = 2l - l^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = l - l^2$$

$$0 = l(1 - l)$$

$$\Rightarrow l = 0 \quad \vee \quad l = 1$$

Como a_n es creciente, l debe ser 1

$$\therefore \lim a_n = 1 = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$