

4

Antes de hablar de sucesiones, es necesario hablar del axioma del supremo, pero antes de eso...

Cotas en $\mathbb{R}$

Si un conjunto A es acotado superiormente es porque

$$(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) \quad \text{TA} \quad \underbrace{x \leq M}$$

existe un real llamado M que para todo elemento del conjunto A M es mayor.

en simple M es cota superior si le gana a todos.

2

de la misma manera se puede definir una cota inferior

$$(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) M \leq x$$

alguien que pierde con todos

ej 1: $[6, 25]$

ES UN CONJUNTO ACOTADO
(superior e inferiormente)

pues 3 es menor que todo el conjunto y 96 es mayor que todo el conjunto.

Nota si M es cota superior de A y $\mathbb{R}$ es mayor que M
 $\Rightarrow \mathbb{R}$ es cota sup. de A

La pregunta es si l es menor que M
¿ l también es cota superior?

Claramente puede ocurrir
como no, por ejemplo
 $[6, 25]$ digamos que tenía
como cota superior 96
si tomamos 93, que es
menor que 96, podemos
ver que también es
cota superior, pero si
tomamos 10, que es
menor que 96, no
cumple ser cota superior.

mmm... entonces ¿Existe alguna forma de asegurar cuando soy la menor, cota superior posible? dicho de otra forma si M es la menor cota superior y l también es cota superior

$\Rightarrow l$ tiene que ser mayor que M .

interesante pregunta... para responder eso demos el siguiente ejemplo sea $A = (1, 25]$ (super original)

dijimos que 93
 era cota superior
 si lo achicamos a 24
 ya no soy cota
 pues 25 pertenece a A
 y 24 es menor que 25
 entonces 26, y ahí
 si es cota ¿pero x
 25,9? también lo es
 entonces 25,9 ¿y 25,8?
 podríamos seguir así
 infinitamente hasta
 llegar a 25,00... 01
 pero ojo cuando definí
 cota era $(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) x \leq M$
 ¡OH!

⑥

puede darse que $x = M$!

entonces mi menor
cota superior es 25!

le gana a todo
el conjunto excepto
a si mismo! esto
es lo que llamaremos
un máximo

en matemáticas

M es máximo si

$$\underline{(\exists M \in A) (\forall x \in A) x \leq M}$$

obviamente podríamos

decir lo mismo sobre el

mínimo

$$(\exists m \in A)(\forall x \in A) \quad x \geq m.$$

que sería la mayor
cota inferior pero
que pertenece al
conjunto en

$(1, 25]$ el

1 NO ES MÍNIMO

Pues el 1 no
pertenece al conjunto.

sin embargo sí ES VERDAD
QUE EL 1 ES LA MAYOR
DE LAS COTAS

~~SUPERIORES~~
INFERIORES

llamaremos Supremo
(ínfimo) a la menor
(mayor) de las cotas
superiores (inferiores)

es decir el $\downarrow$
ES EL ÍNFINIMO DE
 $(1, 25]$

¿Y EL SUPREMO?

ES EL 25! (pero
no que el 25 era
el máximo?) sí
pues era la menor de
las cotas superiores y pertenecía
al conjunto

9

pero en particular
es supremo!

Recordar: si soy
máximo (mínimo)
también soy supremo
(ínfimo)

¿ si soy supremo (ínfimo)
también soy máximo (mínimo)?

SOLO si PERTENEZCO
AL CONJUNTO!

AHORA EN MATEMÁTICAS

s supremo de A si

$$(\forall x \in A) x \leq s \wedge (\forall M \in \mathbb{R}) \neg \left((\forall x \in A) M \geq x \right) \\ \Rightarrow s \leq M$$

(si soy cota y tomo cualquier cota superior de A entonces o soy yo, o es una mayor).

en general es muy difícil trabajar con esta def. así que decimos que

s es el supremo si es "el borde superior" del conjunto, o se que si movemos un poco para

atrás al supremo caigo
dentro del conjunto,
es decir alguien del
conjunto se pone delante mio
en matemáticas

s supremo de A si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) \text{ tal } s - \varepsilon < x$$

si volvemos al conjunto

$(1, 25)$ si al 25 le quitas
lo que sea alguien se
le pone por delante
si le quitas $1 \Rightarrow 25 - 1 = 24 < 25$

↑
se el 25 mismo
se le pone
por delante

$$25 - 0,01 = 24,99 < 24,999$$

y así siempre

en cambio si digo que
el supremo es 25,5
es verdad que si le quitas 1
 $25,5 - 1 = 24,5 < 24,99$

el 24,99 se le pone adelante
pero si le quitas 0,1

$$25,5 - 0,1 = 25,4 < \text{NADIE SE LE PONE ADELANTE}$$

$\Rightarrow 25,5$ NO ES EL SUPREMO.

de la misma forma

s es el infimo de A si
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) s + \varepsilon > x$

si le agrego un poco (cualquier poco)
alguien se le pone atrás.

ejemplo de demostración
 $(2, 3)$ nuestro postulante

a supremo es el 3

PDQ: $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in (2, 3)) \text{ tal } 3 - \varepsilon < x$

separemos el problema en

2 casos si ε es mayor a 1

entonces $3 - \varepsilon$ es menor a 2

$\Rightarrow$ tomamos 2,5 (podría ser cualquier otro) y $3 - \varepsilon < 2,5$

si ε es menor a 1

entonces $3 - \varepsilon$ es menor a 3

y como los n° entre 2 y 3

son infinitos tiene que existir

un $x \in \mathbb{Q}$. $2 < 3 - \varepsilon < x < 3$

por lo que $2 < x < 3 \Rightarrow x \in (2, 3)$
 $\wedge 3 - \varepsilon \leq x$

Como abrimos todos los casos
 de $\varepsilon \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in (2, 3)) 3 - \varepsilon < x$
 es decir 3 es el supremo.

¿Cuál será el sup.
 de $(2, 3) \cup [4, 5]$?