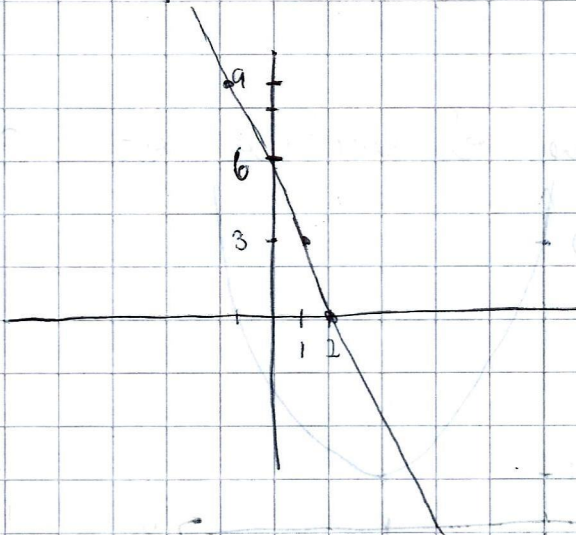


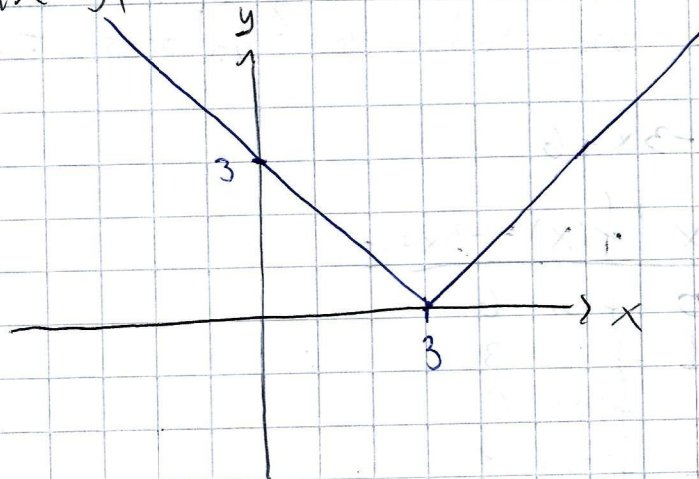
211 Recuerden que para graficar cualquier cosa pueden usar una tabla de valores. Ejemplo

a) $f(x) = -3x + 6$

x	$f(x) = -3x + 6$
0	$f(0) = 6$
1	$f(1) = 3$
2	$f(2) = 0$
-1	$f(-1) = 9$

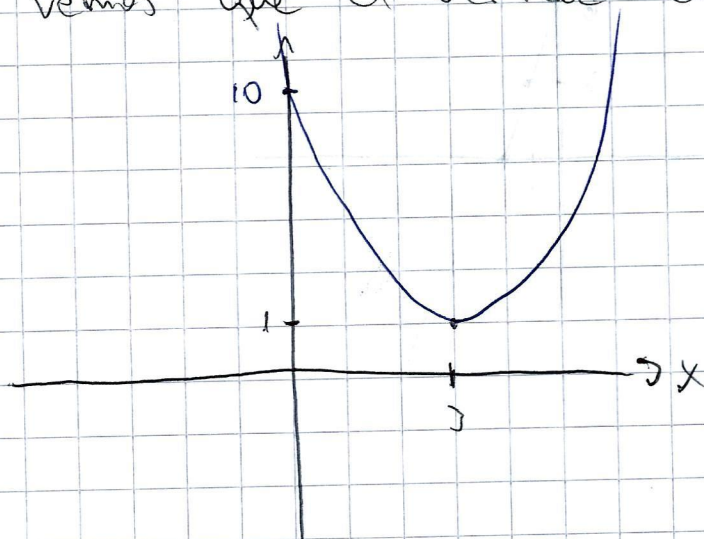


b) $f_2(x) = |x-3|$

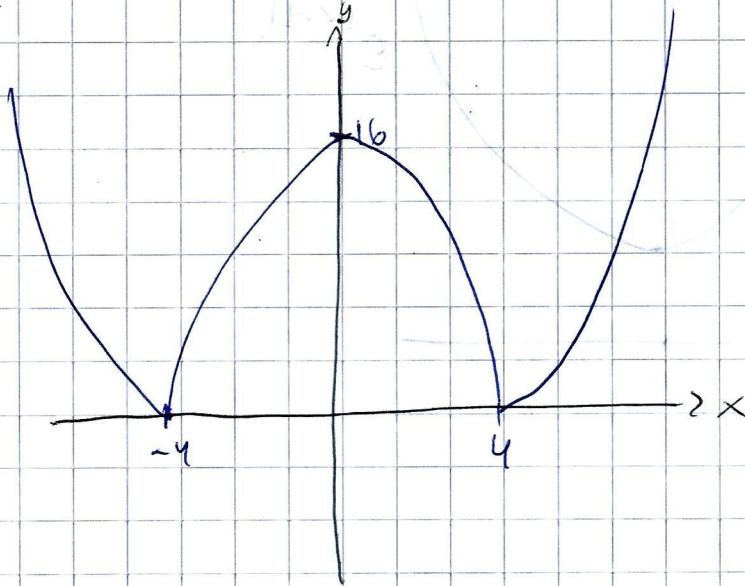


c) $f_3(x) = (x-3)^2 + 1$

De aquí vemos que el vértice es (3, 1)

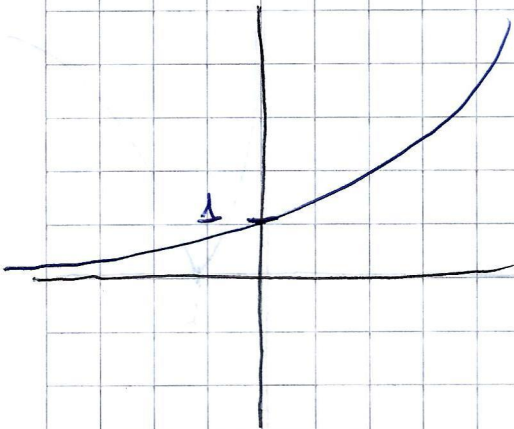


d) $f_4(x) = |x^2 - 16|$

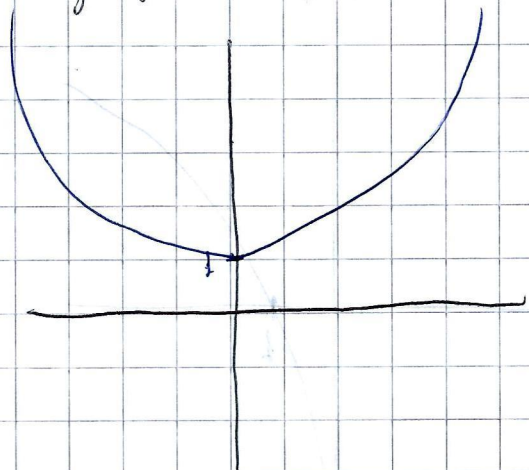


e) $f_5(x) = e^{|x-2|}$

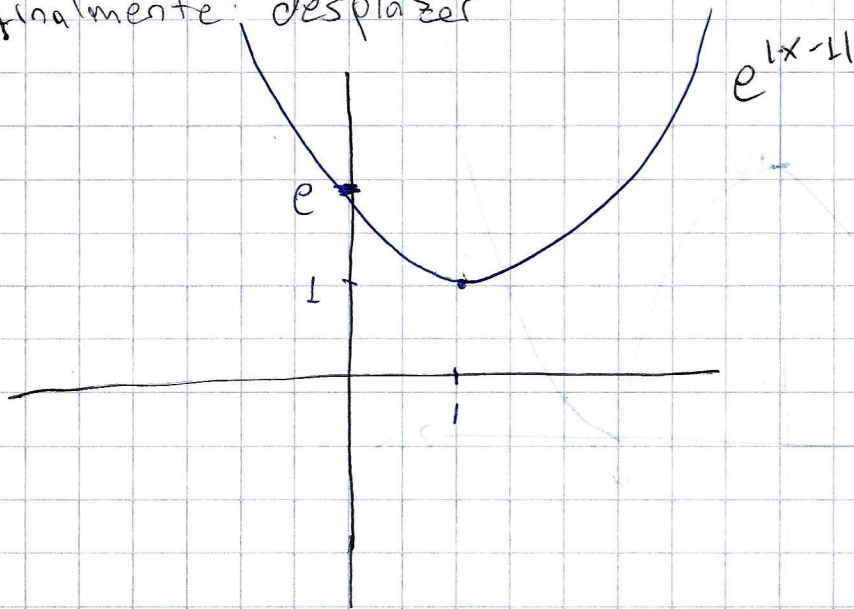
Primero graficar e^x



graficar $e^{|x|}$

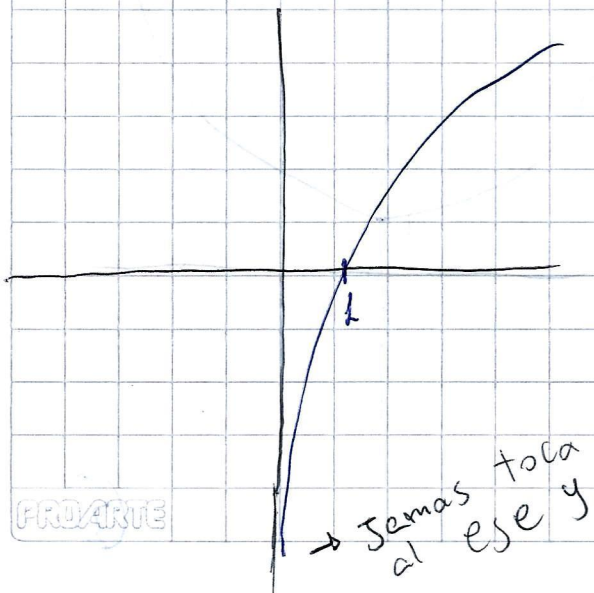


finalmente desplazar

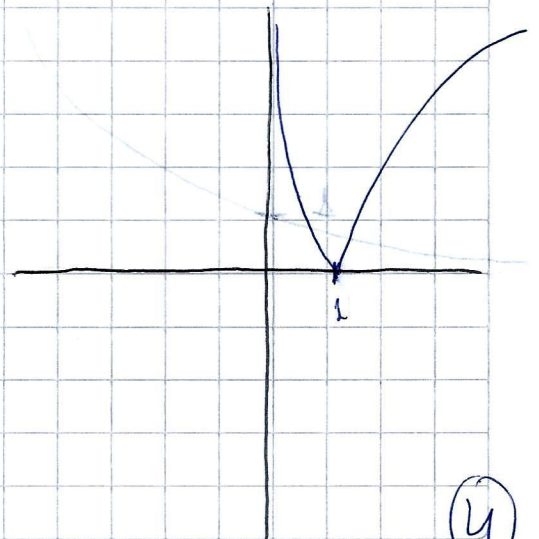


f) $f_6(x) = |\ln(x-1)|$

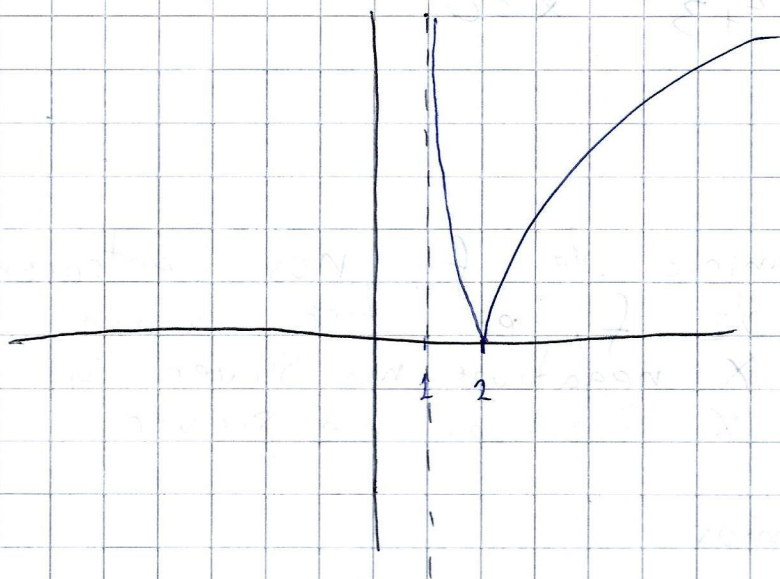
Primero graficamos $\ln(x)$



ahora graficamos $|\ln(x)|$



finalmente graficamos $|\ln(x-1)|$



4,5

Se me fue en el orden

$$P2) f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{x-2} & x < 0 \\ x^2 + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Para ver el dominio, veremos el dominio por separado, considerando siempre el cto en el que estoy parado

para $x < 0$

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2}$$

$\Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, debería quitar el 2 del dominio,
 Pero como esto en los $x < 0$, 2 no está en el cto
 Luego, cualquier valor de x , con $x < 0$ hace que f este bien definido

$\therefore f$ esta bien definido $\forall x < 0$

Para $x \geq 0$

$$f(x) = x^2 + 3$$

No hay restricciones!

$\therefore \forall x \geq 0$ $f(x)$ está bien definido

Luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} //$

b) Ceros de f : haremos lo mismo, impondremos que $f(x) = 0$ y vemos cada caso por separado

Para $x < 0$

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2} = 0$$

$$\Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x=-4$$

y -4 es menor que 0 , luego

$x=-4$ es cero de f

Para $x \geq 0$

$$f(x) = x^2 + 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -3 \quad \text{No tiene sentido}$$

Aquí no hay ceros

°: $x = -4$ es el único cero de f

c) Para $\forall x < 0 \quad -2 < f(x) < 1$

Analizamos el recorrido, solo para la parte de $x < 0$

$\Rightarrow$ Para $x < 0$

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+4}{x-2}$$

$$\Rightarrow y(x-2) = x+4$$
$$yx - 2y = x+4$$

$$yx - x = 2y + 4$$

$$x(y-1) = 2y+4$$

$$x = \frac{2y+4}{y-1}$$

PROARTE

(7)

Luego tenemos que

Para $x \geq 0$

$$x = \frac{2y+4}{y-1}$$

Ahora como $x = \frac{2y+4}{y-1}$, y $x \geq 0$, entonces

$\frac{2y+4}{y-1} < 0$, veamos cuando la fracción es negativa

Puntos críticos $2y+4=0 \Rightarrow y=-2$

$y-1=0 \Rightarrow y=1$

	$-\infty$	-3	-2	0	1	2	$+\infty$
$2y+4$		-		+		+	
$y-1$		-		-		+	
		+		-		+	

Ahora me sirve

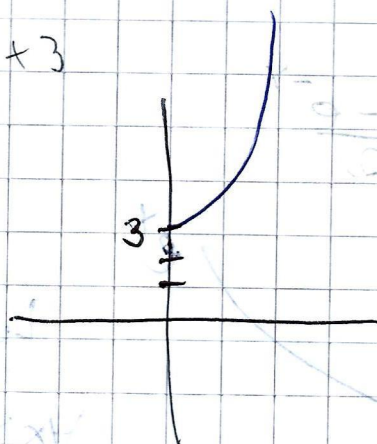
Luego, $\forall x \geq 0$, $y \in]-2, 1[\Leftrightarrow -2 < y < 1 \Leftrightarrow -2 < f(x) < 1$

d) ya sabemos que la imagen de f , para $x \leq 0$
es $\text{Im}(f) =]-2, 1[$
↳ solo para $x \leq 0$

Ahora veamos para $x > 0$

$x \geq 0$ $f(x) = x^2 + 3$

graficando



Luego las imágenes se mueven en $[3, +\infty[$

∴ para $x > 0$ $\text{Im}(f) = [3, +\infty[$

Luego, simplemente hago la unión de las imágenes

∴ para $x \in \mathbb{R}$ $\text{Im}(f) =]-2, 1[\cup [3, +\infty[$

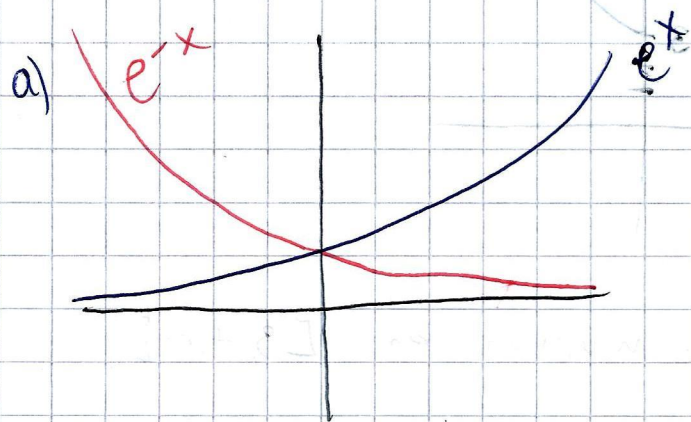
el Para que sea Sobreyectiva, basta que

$$\text{Codom}(f) = \text{Rec}(f)$$

Luego imponemos que el Codominio sea

$\text{Codom}(f) =]-2, 1[\cup]3, +\infty[$, con esto f es Sobreyectiva

P3 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



Luego notamos que

$$\forall x > 0 \quad e^x > e^{-x}$$

$$\forall x < 0 \quad e^{-x} > e^x$$

$$\Leftrightarrow \forall x > 0 \quad e^x - e^{-x} > 0 \quad / : 2$$

$$\Rightarrow \forall x < 0 \quad e^x - e^{-x} < 0 \quad / : 2$$

$$\Leftrightarrow \forall x > 0 \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$$

$$\forall x < 0 \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} < 0$$

$\therefore \forall x > 0 \quad f(x)$ es positivo

y $\forall x < 0 \quad f(x)$ es negativo //

b) Consejo! para probar paridad, empiezen viendo

$f(-x)$, si llegan a $f(x)$, es par

si llegan a $-f(x)$, es impar

$\Rightarrow$ sea $x \in \text{Dom}(f)$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2}$$

$$= \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

$$= -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -f(x)$$

$\therefore f$ es impar ya que $f(-x) = -f(x)$

Ceros de f , imponemos $f(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow e^x - e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow e^x = e^{-x}$$

$$\Rightarrow x = -x$$

$$\Rightarrow 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$\therefore x = 0$ es cero de f

c) pda f es Creciente

Dem: En efecto, en primer lugar notamos que

$$\text{Si } \boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}}$$

pues e^x es
creciente

$$\text{y Si } \boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_2} < e^{-x_1}}$$

pues e^{-x} es
decreciente

TENER ESTO PRESENTE

Empezemos...

Sea $x_1 < x_2$ debemos probar que $f(x_1) < f(x_2)$

o bien probar que $0 < f(x_2) - f(x_1)$ ← poner
restando
 $f(x_2)$

Entonces estudiemos $f(x_2) - f(x_1)$ y veamos
Si es positivo

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} - \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2}$$

$$= \frac{e^{x_2} - e^{x_1} + e^{-x_1} - e^{-x_2}}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{2}}_{\text{Positivo}} + \underbrace{\frac{e^{-x_1} - e^{-x_2}}{2}}_{\text{Positivo}}$$

Como $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$\Rightarrow 0 < e^{x_2} - e^{x_1}$$

Como $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow e^{-x_2} < e^{-x_1}$$

$$\Rightarrow 0 < e^{-x_1} - e^{-x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{2} + \frac{e^{-x_1} - e^{-x_2}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$\therefore f$ es creciente

d) Demostrar que tiene inversa, es lo mismo que demostrar que es biyectiva

$\Rightarrow$ para f es biyectiva

Injectividad | debemos probar que $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.

Sea $x, y \in \text{Dom}(f)$ tal que

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^y - e^{-y}$$

$$\Rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} - e^y + \frac{1}{e^y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(e^x)^2 - 1}{e^x} + \frac{-(e^y)^2 + 1}{e^y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^y((e^x)^2 - 1) + e^x(1 - (e^y)^2)}{e^x e^y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^y e^x e^x - e^y + e^x - e^x e^y e^y}{e^x e^y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x e^y (e^x - e^y) + e^x - e^y}{e^x e^y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(e^x e^y + 1)(e^x - e^y)}{e^x e^y} = 0$$

Llegamos desde $f(x) = f(y)$ a

$$\frac{(e^x e^y + 1)(e^x - e^y)}{e^x e^y} = 0$$

Como $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, jamás será 0

Luego $e^x e^y + 1 > 0$ y $e^x e^y > 0$

Entonces, la única opción de que

$$\frac{(e^x e^y + 1)(e^x - e^y)}{e^x e^y} = 0$$

es que $e^x - e^y = 0$

$\Rightarrow e^x = e^y$ igualdad de potencias de misma base

$$\Rightarrow x = y //$$

$\therefore f$ es inyectiva

Sobreyectividad) debo encontrar un x_* tal que

$$f(x_*) = y, \text{ donde "y" es una imagen arbitraria}$$

Para esto, haremos un procedimiento análogo a calcular la inversa, despejaremos x en función de y

$$\Rightarrow f(x) = y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = e^x - e^{-x}$$

Truco, sirve para poder despejar la x

$$\Rightarrow 2ye^x = (e^x)^2 - \cancel{e^x} \cdot \frac{1}{\cancel{e^x}}$$

$$2ye^x = (e^x)^2 - 1$$

$$\Rightarrow 0 = (e^x)^2 - 2ye^x - 1 \quad \text{Es una cuadrática}$$

!!

$$u = e^x, \text{ como } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow u > 0$$

$$\Rightarrow 0 = u^2 - 2yu - 1$$

$$\Rightarrow 0 = u^2 - 2yu - 1$$

$$a = 1 \quad b = -2y \\ c = -1$$

formula

$$\Rightarrow u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$$

$$= \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} = \cancel{2} \frac{(y \pm \sqrt{y^2 + 1})}{\cancel{2}}$$

$$= y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Como $u > 0$, me quedo
con $y + \sqrt{y^2 + 1}$

$$\therefore \text{ya que } "y \leq |y| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{y^2 + 1}"$$

$$\Rightarrow u = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$u = e^x$$

$$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad / \ln()$$

$$\ln(e^x) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\times \ln^{\frac{1}{x}}(e) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\text{PROPORTE} \quad X = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Luego llamemos X_* a

$$X_* = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Ahora debemos comprobar que $f(X_*) = y$

$$\Rightarrow f(X_*) = \frac{e^{X_*} - e^{-X_*}}{2}$$

$$= \frac{e^{\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})} - e^{-\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})}}{2}$$

$$e^{\ln(a)} = a$$

$$= \frac{y + \sqrt{y^2 + 1} - e^{\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})^{-1}}}{2}$$

$$= \frac{y + \sqrt{y^2 + 1} - \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}}}{2}$$

$$= \frac{(y + \sqrt{y^2 + 1})^2 - 1}{2(y + \sqrt{y^2 + 1})}$$

$$= \frac{y^2 + 2y\sqrt{y^2 + 1} + (\sqrt{y^2 + 1})^2 - 1}{2(y + \sqrt{y^2 + 1})}$$

$$= \frac{y^2 + 2y\sqrt{y^2 + 1} + y^2 + \cancel{1} - \cancel{1}}{2(y + \sqrt{y^2 + 1})}$$

$$= \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2 + 1}}{2(y + \sqrt{y^2 + 1})}$$

$$= \frac{\cancel{2y}(y + \sqrt{y^2 + 1})}{\cancel{2}(y + \sqrt{y^2 + 1})} = y$$

Como $f(x_*) = y$, donde y puede ser cualquier imagen, se concluye que f es sobreyectiva.

$$\text{Con } \text{Rec}(f) = \mathbb{R} //$$

Nota: Podemos ver que en

$$X = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

debemos asegurarnos de que dentro del logaritmo haya una cantidad estrictamente positiva

$$\Rightarrow y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

pero esto es verdad siempre, ya que

$$y \leq |y| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y < \sqrt{y^2 + 1}$$

Luego la expresión $X = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ está bien definida para todo "y".

besta calcular $f^{-1}(x)$, pero como ya tenemos que

$$X = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Cambiamos " X " por $f^{-1}(x)$ ", y cambiamos " y " por " x "

$$\Rightarrow X = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{array}$$

Para terminar se verifica que $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = X$ TAREA!

$\therefore f^{-1}(x)$ es inversa de f