

Aux #6

P21 a) $f(x) = -5x + 2$

→ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, ya que yo puedo darle cualquier valor a x y la función siempre estará bien definida.

Esto ocurre en TODOS los polinomios.

Todo polinomio tiene de dominio todos los reales.

los polinomios son del estilo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad n \in \mathbb{N}$$

ojo aquí, por ejemplo $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ no es polinomio, pues el exponente es negativo

→ Ceros: Imponemos $f(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 0 = -5x + 2$$

$$\Rightarrow -5x + 2 = 0$$

$$-5x = -2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

, luego $x = \frac{2}{5}$ es cero de f

Esto se hace Siempre
Al momento de calcular
Ceros

* Los pto's criticos son los ceros de la función y los valores que hacen que explote el universo

→ Signos: queremos ver para que valores de $f(x)$ es positivo & negativo

⇒ TABLITA

$$f(x) = -5x + 2$$

* ptos criticos | $-5x + 2 = 0$
 $x = \frac{2}{5}$

⇒

	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$-5x+2$	+	-	+

finalmente, $\forall x \in]-\infty, \frac{2}{5}[$, $f(x) > 0$

y ademas $\forall x \in]\frac{2}{5}, +\infty[$, $f(x) < 0$ //

→ Recorrido: Como $f(x) = -5x + 2$, lo que haremos sera ocupar $y = f(x)$, pueden verlo en el apunte en "Grafico de una función", basicamente lo que hacemos es decir que "Dado una posible imagen y , que condiciones debe tener esta para que tenga una pre-imagen factible"

PARTE

Ademas recordar que podemos escribir $f(x) = y$ para poder graficar

②

Con todo esto hacemos lo siguiente

$$f(x) = -5x + 2 = y$$

Despejamos la variable "X"

$$\Rightarrow -5x + 2 = y$$

$$\Rightarrow -5x = y - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - 2}{-5}$$

Ahora nos preguntamos, ¿Que valores de y , hacen que x este bien definido?

La respuesta es todos los reales

$$\therefore \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$$

$$b) f(x) = 3(x+1)(x-5) = 3(x^2 - 4x - 5) = 3x^2 - 12x - 15$$

→ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, Pues es un polinomio

→ Ceros de f , Imponemos $f(x) = 0$

Aquí pueden usar la fórmula en " $3x^2 - 12x - 15$ " o bien en " $3(x+1)(x-5)$ "

$$\Rightarrow f(x) = 3(x+1)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+1)(x-5) = 0 \quad / \text{Dividimos por 3}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x+1 = 0 \quad \text{o} \quad x-5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \text{o} \quad x = 5$$

∴ los ceros son $x = -1$ y $x = 5$

→ Signos:

ptos críticos $3(x+1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = 5$

⇒

	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$3(x+1)$	-	+	+	+
$(x-5)$	-	-	+	+
	+	-	+	+

Luego, $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$, $f(x) > 0$

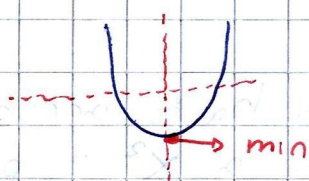
y $\forall x \in]-1, 5[$, $f(x) < 0$.

→ Recorrido) 1. Por vertice

Como sabran del colegio, o simplemente a traves de los graficos que tiene una función cuadrática

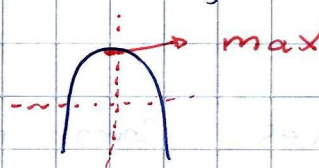
hay 2 tipos de graficos

hacia arriba



Aquí hay un mínimo

hacia abajo



Aquí hay un max

Estos mínimos o máximos se pueden calcular, y es más, estos mínimos o máximos son el vertice de la parábola

Es decir, Para calcular el recorrido, debemos ver la orientación de la parábola.

Si va para arriba, el recorrido será del vertice para arriba
Si va para abajo, el recorrido será del vertice para abajo

entonces, tenemos que $f(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$a = 3$ el vertex es $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

$$b = -12$$

$$c = -15$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{(-12)}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(-\frac{b}{2a}) &= f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 15 \\ &= 3 \cdot 4 - 24 - 15 \\ &= 12 - 24 - 15 \\ &= -27\end{aligned}$$

entonces, como la parabola va hacia arriba (ya que la constante que acompaña a x^2 es positiva)

$$\text{tengo que } \text{Rec}(f) = [-27, +\infty[//$$

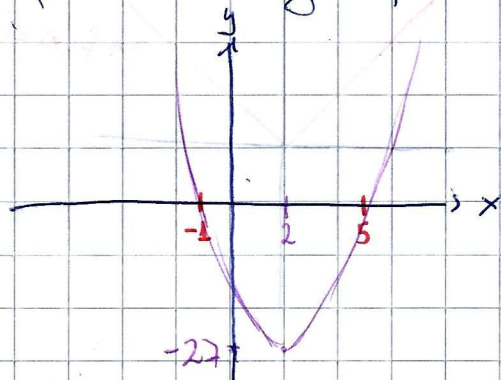
2. Por grafico (sirve para cualquier función)

Es algo parecido a lo anterior, vamos a graficar!

- 1) identificamos los ceros en el plano
- 2) la orientación de la parabola
- 3) Vertex

PROPORTE Luego, con esto y usando evaluación de funciones, es decir, ver los valores de $f(0), f(1), \text{etc}$ (6)

Podemos graficar



de aquí para arriba
hay gráfico

Ahora, ¿Donde hay gráfico para la variable y ?

La respuesta a esta pregunta, es el recorrido

$$\Rightarrow \text{Rec}(f) = [-27, +\infty[$$

$$c) f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \text{Ceros: } |x| = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ , } x = 0 \text{ es Cero de } f$$

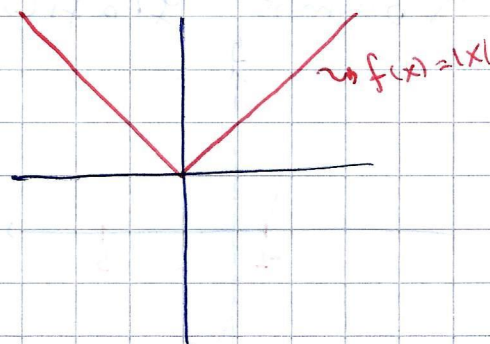
$$\rightarrow \text{Signos: } f(x) = |x| \geq 0 \text{ siempre es positivo ya que es valor absoluto}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$$

$$\text{o bien } \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } f(x) > 0$$

→ Recorrido: grafiquemos

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$\therefore \text{Rec}(f) = [0, +\infty[$$

d) $f(x) = |2x + 5|$

→ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

→ Ceros: $f(x) = 0$

$$\Rightarrow |2x + 5| = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2x + 5 &= 0 \\ 2x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore x = -\frac{5}{2} \text{ es cero de } f$$

→ Signos: Mismo argumento anterior

$$f(x) = |2x + 5| \geq 0$$

Siempre es positivo
ya que es valor absoluto

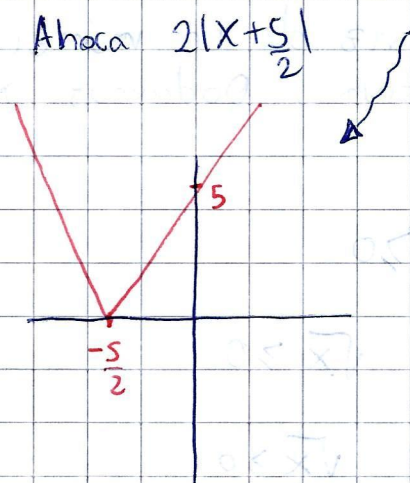
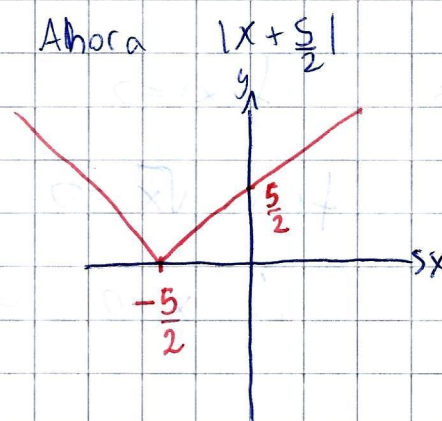
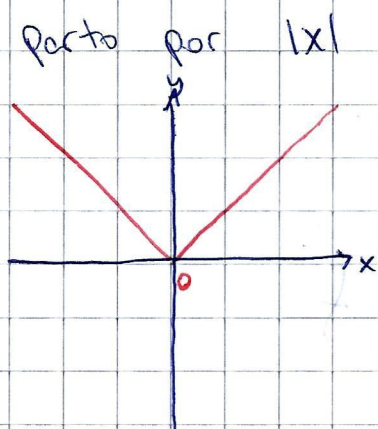
$$\therefore \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$$

O bien $\therefore \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\} \quad f(x) > 0$

→ Recorrido: grafiquemos

$$f(x) = |2x+5| = |2(x+\frac{5}{2})| = 2|x+\frac{5}{2}|$$

Se desplace en $\frac{5}{2}$ a la izquierda y se pondere por 2



∴ $\text{Rec}(f) = [0, +\infty[$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

→ $\text{Dom}(f) = [0, +\infty[$

Pues si meto valores negativos a la raíz me quedan números imaginarios

→ Ceros: $f(x) = 0$

⇒ $f(x) = \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

∴ $x = 0$ es cero de f

→ Signos: Como la raíz de un número es siempre positiva, podemos argumentar con esto

⇒ $f(x) = \sqrt{x} \geq 0$

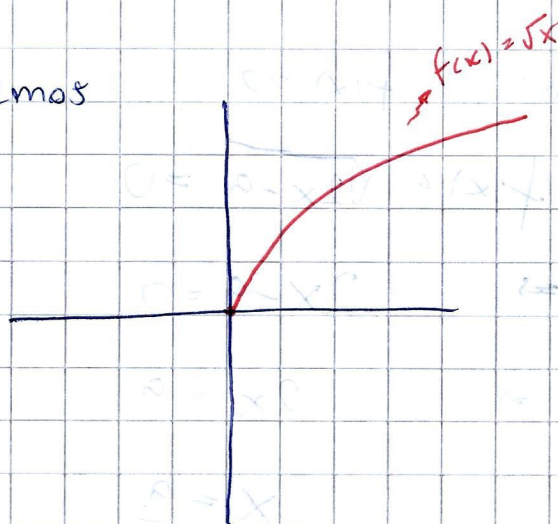
∴ $\forall x \in \text{Dom}(f) \quad \sqrt{x} \geq 0$

⇔ $\forall x \in [0, +\infty[\quad \sqrt{x} \geq 0$

o bien $\forall x \in]0, +\infty[\quad \sqrt{x} > 0$

→ Recorrido: grafiquemos

$$f(x) = \sqrt{x} \rightsquigarrow$$



$$\therefore \text{Rec}(f) = [0, +\infty[$$

$$f) f(x) = \sqrt{2x-9}$$

→ Para el dominio, debemos ver que lo de adentro de la raíz sea positivo

$$\Rightarrow 2x - 9 \geq 0$$

$$2x \geq 9$$

$$x \geq \frac{9}{2}$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = \left[\frac{9}{2}, +\infty[$$

→ Ceros: $f(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x-9} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$\therefore x = \frac{9}{2}$ es Cero de f

→ Signos: Como las raíces son positivas

$$f(x) = \sqrt{2x-9} \geq 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$\therefore \forall x \in \left[\frac{9}{2}, +\infty\right[\quad f(x) \geq 0$$

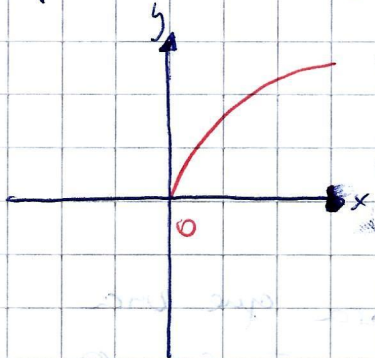
$$\text{o bien } \forall x \in \left]\frac{9}{2}, +\infty\right[\quad f(x) > 0$$

→ Recorrido: grafiquemos

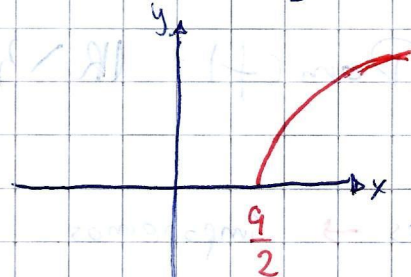
$$f(x) = \sqrt{2x-9} = \sqrt{2\left(x-\frac{9}{2}\right)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-\frac{9}{2}}$$

Se desplaza en $\frac{9}{2}$ hacia la derecha y
se pondera por $\sqrt{2}$

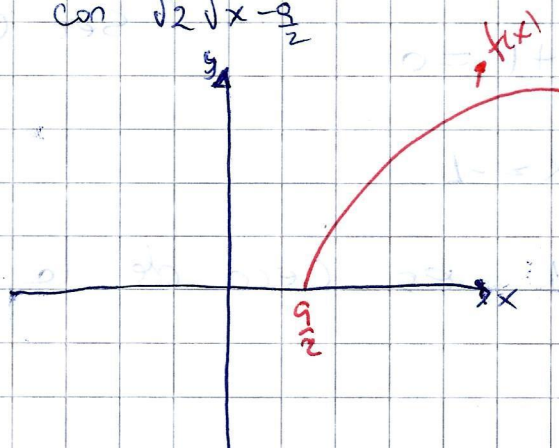
Partimos con $\sqrt{x}$



Ahora $\sqrt{x-\frac{9}{2}}$



Terminamos
con $\sqrt{2}\sqrt{x-\frac{9}{2}}$



$$\therefore \text{Rec}(f) = [0, +\infty[$$

P3] Sea $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

a) Dominio $\rightarrow$ Evitamos el caso $\frac{cte}{0}$

$$\Rightarrow 2x+1=0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Ceros $\rightarrow$ imponemos $f(x)=0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{2x+1} = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

$\therefore x = -1$ es cero de la función

Signos → Vemos la tablita

Ptos críticos

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

entonces la tabla queda

	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$x+1$		-		+		+	
$2x+1$		-		-		+	
		+		-		+	

$$\therefore \forall x \in]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[\quad f(x) > 0$$

$$\text{y } \forall x \in]-1, -\frac{1}{2}[\quad f(x) < 0$$

b) inyectiva?

Qda $\forall x, y \in \text{Dom}(f) \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

En efecto, sea x, y arbitrarios tal que
 $f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} = \frac{y+1}{2y+1} \quad / \quad \text{Pasamos multiplicando cruzado}$

$\Rightarrow (2y+1)(x+1) = (2x+1)(y+1)$

~~$2xy + 2y + x + 1 = 2xy + 2x + y + 1$~~

$\Leftrightarrow 2y + x = 2x + y$

$2y - y = 2x - x$

$y = x //$

$\therefore f$ es inyectiva

c) Pda $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{2} \}$

En efecto, como $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

tomamos la siguiente ecuación

$$y = \frac{x+1}{2x+1}$$

$$\Rightarrow (2x+1)y = x+1$$

$$\Rightarrow 2xy + y = x+1$$

$$\Rightarrow 2xy - x = 1-y$$

$$\Rightarrow x(2y-1) = 1-y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-y}{2y-1}$$

luego " y " puede tomar cualquier valor excepto $y = \frac{1}{2}$

$$\therefore \text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{2} \} //$$