

P2 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

a) Dominio de f

→ Para determinarlo, basta con estudiar los valores de " x " tal que $f(x)$ este indefinido

Como $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$ / (Suma de fracciones)

luego como " x " esta en el denominador, si $x=0$ $f(0)$ esta indeterminado.

Finalmente el Dominio de f sera $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Probar que f es decreciente en $(0,1)$ y creciente en $(1,\infty)$

→ Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$ tal que $0 < x_1 < x_2$

Estudiaremos la diferencia $f(x_1) - f(x_2)$ Para luego imponer condiciones

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1 + \frac{1}{x_1} - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = (x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} \end{aligned}$$

Factorizamos!
Por $(x_2 - x_1)$

$$= (x_2 - x_1) \left[-1 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2} \right]$$

luego tenemos que $x_1 \leq x_2$ y

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{x_1 x_2} - 1 \right]$$

Si $x_1, x_2 \in (0, 1) \Rightarrow \boxed{x_2 - x_1 \geq 0} \wedge 0 < x_1 \cdot x_2 \leq 1$ (*) Leer Abajo

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1 x_2} \geq 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x_1 x_2} - 1 \geq 0}$$

Es decir si $x_1 < x_2$ entonces

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Mayor o igual} \\ \text{a } 0}} \underbrace{\left[\frac{1}{x_1 x_2} - 1 \right]}_{\substack{\geq 0 \\ \text{Mayor o} \\ \text{igual a } 0}}$$

Como ambos son positivos, entonces el producto será positivo, es decir

$$f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

finalmente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x \in (0, 1)$$

$\therefore f$ es decreciente en $(0, 1)$

(*) Si x_1 y x_2 viven en $(0, 1)$ el máximo valor que pueden tomar es casi 1, si tomamos $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$ / Como es casi $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 < 1$

Ahora falta demostrar crecimiento en $(1, \infty)$, para esto utilizaremos la diferencia ya calculada y tambien que $x_1 \leq x_2$.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{x_1 \cdot x_2} - 1 \right]$$

Leer Abajo

$$\text{Si } x_1, x_2 \in (1, \infty) \Rightarrow \boxed{x_2 - x_1 \geq 0} \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 > 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x_1 \cdot x_2} < 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x_1 \cdot x_2} - 1 < 0}$$

Es decir si $x_1 < x_2$ entonces

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{mayor o} \\ \text{igual a 0}}} \left[\underbrace{\frac{1}{x_1 \cdot x_2} - 1}_{\substack{< 0 \\ \text{menor que 0}}} \right]$$

Como tienen distinto signo, entonces el producto sera negativo, es decir

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Finalmente

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$\therefore f$ es creciente en $(1, \infty)$

⊗ si x_1 y x_2 viven en $(1, \infty)$ el minimo valor que pueden tomar es casi 1, el mismo argumento anterior, si tomamos $x_1 = x_2 = 1$, Como es casi 1 $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \geq 1$

c) Probar que $\forall x > 0, f(x) \geq 2$

$\rightarrow$ Probar que $f(x) \geq 2$ es equivalente a probar que $f(x) - 2 \geq 0$.

Entonces analizemos $f(x) - 2$

$$f(x) - 2 = x + \frac{1}{x} - 2$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x} - 2$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2x}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x}$$

Pasos

/ Definición de f

/ Suma de fracciones

/ Suma de fracciones

/ conmutatividad

/ Factorizamos

Luego como $(x-2)^2$ es un "valor" al cuadrado, y todo número al cuadrado es positivo

$\Rightarrow (x-2)^2 \geq 0$ y como es para todo $x > 0$

$$\Rightarrow f(x) - 2 = \frac{(x-2)^2}{x} \xrightarrow{\text{mayor a } 0} \Rightarrow f(x) - 2 \geq 0$$

$\hookrightarrow$ mayor a 0

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 2$$



d) Mostrar que f es impar y deducir que $\forall x < 0$
 $f(x) \leq -2$

$\forall x \in \text{Dom } f \quad f(-x) = -f(x) \quad \{ \text{Definición de ser Impar} \}$

Luego empezamos viendo $f(-x)$

$$f(-x) = (-x) + \frac{1}{(-x)} = (-x) + \left(-\frac{1}{x}\right) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{f(x)}$$

$\therefore$ Como $f(-x) = -f(x)$ f es impar

Luego como $\forall x > 0 \quad f(x) \geq 2$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall x < 0}_{\text{negativos}} \quad f(-x) \geq 2$$

$$\Leftrightarrow -f(x) \geq 2 \quad / \text{por ser } f \text{ impar}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq -2$$

$$\therefore \forall x < 0 \quad f(x) \leq -2$$