

P4) a) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + k$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$$

separamos las sumatorias

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

Sumas Conocidas

b) $\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$

En esta suma, queremos que empiece desde $k=1$, para esto usaremos la traslación de índice, entonces

$$\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1) = \sum_{k=3-2}^{n-1-2} ((k+2)-2)((k+2)+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-3} k(k+3)$$

multiplicamos

$$= \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + 3k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + \sum_{k=1}^{n-3} 3k$$

separamos las sumatorias

Sacamos las
constantes fuera
de la sumatoria

$$= \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{n-3} k$$

$$= \frac{(n-3)((n-3)+1)(2(n-3)+1)}{6} + 3 \frac{(n-3)(n-3+1)}{2}$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + 3 \cdot \frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

d) Recordar $\ln(1) = 0$ y $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Realizar suma
 $1 + \frac{1}{k}$

$$= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

Propiedad de
logaritmos

$$= \ln(n+1) - \ln(1)$$

Telescopica

$$= \ln(n+1)$$

$$\ln(1) = 0$$

$$e) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

notemos primero que $\frac{1}{k(k+1)}$ es igual a

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, efectivamente calculemos

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$$

Amplificar las fracciones para obtener el mismo denominador

$$= \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

luego tenemos que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$

entonces calcular $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ es lo mismo que

calcular $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Luego

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n -1 \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

factorizemos por -1

$$= -1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

Sacamos las constantes

$$= -1 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Telescópica

$$f) \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

Racionalizamos

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}^2 - \sqrt{k}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\cancel{k+1} - \cancel{k}}$$

$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

entonces calcular $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ es lo mismo que calcular

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

entonces

Telescopica

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1}$$

Horario de Consultas

$$b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}}$$

lo que haremos, sera racionalizar

$$\frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k}(k+1) - k\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}(k+1) - k\sqrt{k+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{k}(k+1) - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)^2 - k^2(k+1)}$$

suma por
diferencia

$$= \frac{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{k(k+1)(k+1-k)}$$

factorizemos de
forma conveniente

$$= \frac{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{k(k+1)} \cdot \frac{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}}$$

Racionalizamos
la expresión
 $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}$

$$= \frac{k(k+1)(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{k(k+1)\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$$

Ahora que llegamos a que

$$\frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$$

nos gustaría formar una telescópica, para eso veamos que

$$\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

efectivamente, calculemos $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$$

amplificar
cada fracción
para que tengan
el mismo
denominador

$$= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$$

✓ $\square$

$$\text{finalmente, } \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Luego tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)} + k\sqrt{k+2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Telescopica

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Mucho Éxito! Ustedes pueden !!