

Resumen

Logica:

Para poder demostrar teoremas en matematica es necesario la logica, esto le proporciona a las matematicas un lenguaje más preciso y comodo para lograr demostrar todo lo que queramos.

Proposición: es un enunciado que siempre toma uno de los valores de verdad posibles Verdadero o falso.

Ejemplo: $5 = 7$, es una proposición y toma el valor Falso.

Para hablar de proposiciones genericas (arbitrarias) usamos las letras P, q, r, s , etc.

Conectivos: se usan para combinar proposiciones simples, esto se ve mediante tablas de verdad.

Tablas de verdad: es una tabla que muestra las posibles combinaciones de valores de verdad que tienen las proposiciones a estudiar.

Ejemplo: Como lo vimos en horario de consulta

P	tabla de verdad:
V	para una Proposición Simple
F	Cualquiera.

Notemos que si se desea analizar más proposiciones a la vez, debemos ver las posibles combinaciones que se pueden generar.

Ejemplo: sean P, q y r , 3 proposiciones, la tabla de verdad analizando P y q al mismo tiempo es

P	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Ahora si analizamos las 3 proposiciones, su tabla sera

	P	q	r
Fila 1	V	V	V
Fila 2	V	V	F
Fila 3	V	F	V
Fila 4	V	F	F
Fila 5	F	V	V
Fila 6	F	V	F
Fila 7	F	F	V
Fila 8	F	F	F

Los casos de interes o los casos que estudiaremos seran por filas, por ejemplo la fila 1 me dice que hay una combinacion de valores de verdad de las proposiciones en el que todas son verdaderas simultaneamente

Veamos ahora la tabla de verdad de los conectivos

negación ($\neg$)	P	$\neg P$	$\rightarrow$ se lee "no P"
Fila 1	V	F	
Fila 2	F	V	

Se niega el valor de verdad de la proposicion, en la fila 1 P es verdadero, entonces la negacion de P, " $\neg P$ ", sera lo contrario a verdadero, es decir, falso

$\vee$ - lógicos ($\vee$)

P	q	$P \vee q$	$\rightarrow$ se lee " $P \vee q$ "	
V	V	V		
V	F	V		
F	V	V		
F	F	F		

Si al menos un termino de la expresión " $P \vee q$ " es verdadero, entonces la expresión es verdadera

$\wedge$ - lógicos ($\wedge$)

P	q	$P \wedge q$	$\rightarrow$ se lee " $P \wedge q$ "	
V	V	V		
V	F	F		
F	V	F		
F	F	F		

la proposición " $P \wedge q$ " sera verdadera siempre que tanto P como q sean verdadero.

Implicancia ($\Rightarrow$)

P	q	$P \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\rightarrow$ se lee "P, entonces q"
también "P implica q"

P: hipótesis

q: Tesis

basta recordar cuando $P \Rightarrow q$ es falso, el resto siempre es verdadero

Algo interesante es notar que si la hipótesis es falsa se puede concluir cualquier cosa

- Ejemplo: como vimos en horario de consulta, estudiemos la siguiente proposición

Si $2 = 1 \Rightarrow$ el Papa y yo somos la misma persona

notemos que la tesis es absurda pero aun así esta proposición tiene sentido de acuerdo a la hipótesis.

Efectivamente, si pensamos, en un principio el papa y yo somos 2 personas (puede que seamos la misma o no), ahora bien como $2 = 1$ resulta que el papa y yo somos 1 persona, es decir, somos la misma persona !! Cuático! (5)

Doble implicación ($\Leftrightarrow$)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

→ se lee "P si y solo si Q"

Si las proposiciones tienen el mismo valor de Verdad, entonces la expresión " $P \Leftrightarrow Q$ " será verdadera

Cuantificadores y funciones proposicionales

¿Que ocurre si mi proposición depende de los valores que se le puedan entregar?

Ejemplo: $n-1 > 0$; esto es una función proposicional que depende de la variable " n ".
Si $n=0$, la expresión que $0-1 > 0$, es decir $-1 > 0$ lo cual es falso.
Ahora si $n=2$, la expresión queda $1 > 0$, lo cual es cierto.

Como vemos una función proposicional tiene un valor de Verdad para cada valor que yo le entregue

Para hacer más específicas las funciones proposicionales se utilizan los cuantificadores

"Para todo" se escribe $\forall$

"existe al menos un" se escribe $\exists$

Luego podemos combinar estas cosas para así obtener una expresión que tiene un solo valor de verdad

Ejemplo

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 0$ esto es verdad

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > 2$ es falso, pues no todos los naturales cumplen la desigualdad, por ejemplo el 1

$(\exists n \in \mathbb{N}) \quad 3n = 6$ verdadero, existe el número el cual es el número 2

Además se cumple lo siguiente

$\sim \forall \Leftrightarrow \exists$ la negación de para todo, es existe

$\sim \exists \Leftrightarrow \forall$ la negación de existe, es para todo

PROARTE

7

Ahora, que pasa si quiero demostrar algo del estilo " $P \Rightarrow Q$ " y no puedo usar tabla de verdad.

Para esto usaremos una tecnica muy util que sera asumir como verdad la hipotesis y con esto, tratar de llegar a la tesis, es decir

Problema $P \Rightarrow Q$

nos interesa el caso $V \Rightarrow V$, entonces lo que haremos es asumir que P es verdadero y mediante algebra, astucia y suerte, podremos llegar a Q

- Pregunta: ¿Por que solo nos interesa el caso $V \Rightarrow V$?
- Respuesta: Porque si la hipotesis es falsa la implicancia es verdadera instantaneamente

Inducción

Si queremos probar que $(\forall n \geq n_0) P(n)$, que en español se lee

Si queremos probar una proposición " $P(n)$ " válido para todos los naturales mayores que el número " n_0 ".

Para demostrar esto, por lo general es muy complicado, pero el principio de inducción me facilita el trabajo.

En vez de probar $(\forall n \geq n_0) P(n)$, basta probar la sgte proposición

$$\{ P(n_0) \wedge [\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)] \}$$

Los pasos a seguir son

Paso 1) probar caso base, es decir probar $P(n_0)$, el caso base siempre será el menor número natural que hace que " $P(n)$ " sea verdad.

Paso 2) Asumir que para algún número natural mayor o igual al caso base, n_0 , la proposición $P(n)$ es verdad (hipótesis de inducción).

Paso 3) Probar que si asumi mi hipótesis de inducción para un número " k ", entonces la proposición $P(k+1)$ es verdadera. ¡Ojo! se deben usar las hipótesis de inducción.