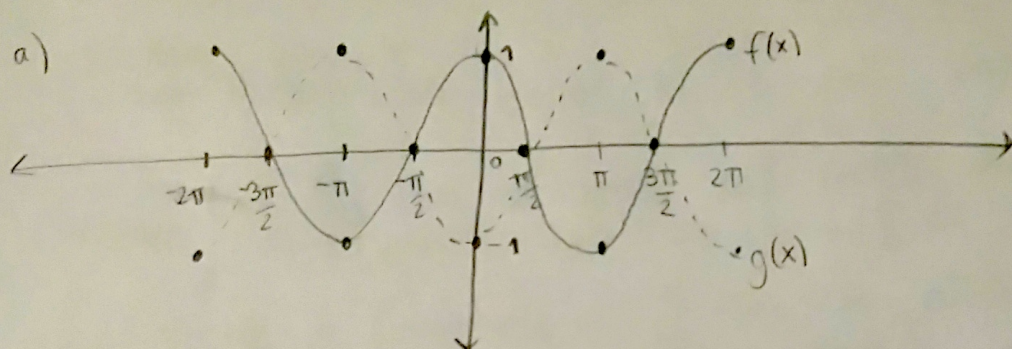


PAUTA AUXILIAR 12

P1) a)



* $f(x)$ es $\sin(x)$ desplazado $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda
 $g(x)$ es $\cos(x)$ desplazado π a la izquierda

b) $h(x) = 0$

$t(x) = 2f(x)$

P2) a)
$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cancel{\cos \beta}}{\cos \alpha \cdot \cancel{\cos \beta}} - \frac{\sin \beta \cdot \cancel{\cos \alpha}}{\cancel{\cos \alpha} \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \alpha - \tan \beta //$$

b) Sea $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\alpha > \beta$

veamos como es $\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$

ya que $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\cos \alpha > 0$ y $\cos \beta > 0$

$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos \beta > 0$

SOLO FALTA ver como es $\sin(\alpha - \beta)$.

$$\alpha - \beta > 0 \quad \text{porque} \quad \alpha > \beta.$$

Ahora veamos cual es el valor más grande que $\alpha - \beta$ puede tomar (la diferencia más grande).

Esto se daría si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (o justo antes) y $\beta = -\frac{\pi}{2}$ (o justo antes).

La máxima diferencia sería π .

$$\Rightarrow \quad 0 < \alpha - \beta < \pi$$

ya que $\alpha - \beta \in (0, \pi)$, $\sin(\alpha - \beta) > 0$.

$$\text{Ahora,} \quad \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) \overset{(+)}{}}{\underbrace{\underbrace{\cos(\alpha)}_{(+)} \underbrace{\cos(\beta)}_{(+)}}_{(+)}} \overset{(+)}{}} \quad (+)$$

Entonces, si $\alpha > \beta$, $\tan(\alpha) - \tan(\beta) > 0$ por lo que $\tan(x)$ es estrictamente creciente.

P3) Si $\cos(x+y) = 0$

$$x+y = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi - x$$

Veamos ahora $\sin(x+2y) = \sin\left(x+2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi - x\right)\right)$

$$= \sin(x + \pi + 2k\pi - 2x) = \sin(\pi - x + \underbrace{2k\pi}_{\text{esto es irrelevante, ya que no cambiará el valor}}) = \sin(\pi - x)$$

$$= \cancel{\sin(\pi)}^0 \cdot \cos(-x) + \cancel{\cos(\pi)}^{-1} \cdot \sin(-x) = -\sin(-x) = --\sin(x) = \sin(x) //$$

P4) a) $\sin \beta \cos(\alpha - \beta) + \cos \beta \sin(\alpha - \beta)$

$$= \sin \beta [\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta] + \cos \beta [\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha]$$

$$= \sin \beta [\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta] + \cos \beta [\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha]$$

$$= \cancel{\sin \beta \cos \alpha \cos \beta} + \sin \alpha \sin^2 \beta + \sin \alpha \cos^2 \beta - \cancel{\sin \beta \cos \alpha \cos \beta}$$

$$= \sin \alpha \sin^2 \beta + \sin \alpha \cos^2 \beta = \sin \alpha (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)$$

$$= \sin \alpha \cdot 1 = \sin \alpha //$$

$$\begin{aligned}
 b) \cos \theta \cos(\alpha + \theta) + \sin \theta \sin(\alpha + \theta) \\
 = \cos \theta [\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta] + \sin \theta [\sin \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta] \\
 = \cos \alpha \cos^2 \theta - \cancel{\sin \alpha \sin \theta \cos \theta} + \cancel{\sin \alpha \sin \theta \cos \theta} + \sin^2 \theta \cos \alpha \\
 = \cos \alpha \cos^2 \theta + \cos \alpha \sin^2 \theta = \cos \alpha (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 = \cos \alpha \cdot 1 = \cos \alpha //
 \end{aligned}$$

c) recordemos la propiedad

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

$$\text{Tomemos entonces } \alpha = \frac{x+y}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = x+y$$

es directo entonces que

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin(x+y)}{2} //$$