PAUTA AUXILIAR 10

P1]

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{|x+3||x-3|(x+2)}$$

- Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}$

Si $x \in (-\infty, -3)$

$|x+3| = -(x+3)$
$|x-3| = -(x-3)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{-(x+3)\cdot-(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Si $x \in (3, +\infty)$

$|x+3| = (x+3)$
$|x-3| = (x-3)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Si $x \in (-3, 3)$

$|x+3| = (x+3)$
$|x-3| = -(x-3)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)\cdot-(x-3)(x+2)} = \frac{1}{-(x+2)}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \\ \frac{1}{-(x+2)} & \text{si } x \in (-3, 3) \setminus \{-2\} \end{cases}$$

- Ceros: esta función no tiene ceros ya que el nominador nunca será 0.

signos: Debemos evaluar en intervalos:

si $x \in (-\infty, -3)$

$$f(x) = \frac{1 \}(+)}{x+2 \}(-)} \Big\}(-)$$

si $x \in (-3, -2)$

$$f(x) = \frac{1 \}(+)}{\underbrace{-(x+2)}_{(-)} \}(+)} \Big\}(+)$$

si $x \in (-2, 3)$

$$f(x) = \frac{1 \}(+)}{\underbrace{-(x+2)}_{(+)} \}(-)} \Big\}(-)$$

si $x \in (3, +\infty)$

$$f(x) = \frac{1 \}(+)}{x+2 \}(+)} \Big\}(+)$$

$\therefore$ $f(x) > 0$ si $x \in (-3, -2) \cup (3, +\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 3)$

• Crecimiento: Veamos cada caso

Sea $x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ tal que $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2+2} - \frac{1}{x_1+2} = \frac{(x_1+2)-(x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$$= \frac{x_1+2-x_2-2}{(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{x_1-x_2}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$x_1 - x_2$ } esto siempre será negativo ya que $x_1 < x_2$

Veamos el resto en intervalos:

Si $x \in (-\infty, -3)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1-x_2}{\underbrace{(x_1+2)}_{(-)}\underbrace{(x_2+2)}_{(-)}} \begin{matrix} \} (-) \\ \} (+) \end{matrix} \Big\} (-)$$

Si $x \in (3, +\infty)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1-x_2}{\underbrace{(x_1+2)}_{(+)}\underbrace{(x_2+2)}_{(+)}} \begin{matrix} \} (-) \\ \} (+) \end{matrix} \Big\} (-)$$

$f(x)$ es decreciente si $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

sea ahora $x_1, x_2 \in (-3,3) \setminus \{-2\}$ tal que $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{-(x_2+2)} - \frac{1}{-(x_1+2)} = \frac{-1}{(x_2+2)} + \frac{1}{(x_1+2)}$$

$$= \frac{-(x_1+2) + (x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{-x_1 - 2 + x_2 + 2}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{(x_1+2)(x_2+2)} \} \text{ esto siempre será positivo ya que } x_1 < x_2$$

Veamos ahora en intervalos

Si $x \in (-3,-2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{(x_1+2)(x_2+2)} \left.\begin{matrix} \} (+) \\ \} (+) \end{matrix}\right\} (+)$$

(x_1+2) es $(-)$, (x_2+2) es $(-)$

Si $x \in (-2,3)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{(x_1+2)(x_2+2)} \left.\begin{matrix} \} (+) \\ \} (+) \end{matrix}\right\} (+)$$

(x_1+2) es $(+)$, (x_2+2) es $(+)$

$\therefore$ $f(x)$ es creciente cuando $x \in (-3,3) \setminus \{-2\}$

• PARIDAD:

Si $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)+2} \neq f(x) \quad y \quad \neq -f(x)$$

∴ NO es par ni impar

Si $x \in (-3, 3) \setminus \{-2\}$

$$f(-x) = \frac{1}{-(-x+2)} = \frac{1}{x-2} \neq f(x) \quad y \quad \neq -f(x)$$

∴ $f(x)$ NO es NI PAR NI IMPAR

• INYECTIVIDAD: $f(x)$ no es inyectiva ya que, por ejemplo:

$$f(0) = \frac{1}{-(0+2)} = \frac{-1}{2}$$

$$f(-4) = \frac{1}{-4+2} = -\frac{1}{2}$$

y $-4 \neq 0$

- SOBREYECTIVIDAD $f(x)$ no es sobreyectiva ya que., por ejemplo, $f(x)$ nunca será 0. Por lo que 0 pertenece al codominio y no a la imagen.

- BIYECTIVIDAD: ya que $f(x)$ no es inyectiva, tampoco es biyectiva.

- Imagen:

Si $X \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$y = \frac{1}{x+2} \quad / \cdot (x+2)$$

$$y(x+2) = 1$$

$$xy + 2y = 1 \quad / -2y$$

$$xy = 1 - 2y \quad / \ y$$

$$x = \frac{1-2y}{y}$$

"y" Podría ser cualquier cosa menos 0.

Si $x \in (-3,3) \setminus \{-2\}$

$$y = \frac{1}{-(x+2)} \quad / \cdot -(x+2)$$

$$-y(x+2) = 1$$

$$-yx - 2y = 1 \quad / +yx$$

$$-1 - 2y = yx$$

$$x = \frac{-1-2y}{y}$$

Nuevamente vemos que la única restricción para "y" es que sea $\neq 0$.

$\therefore Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

8] Veamos cada gráfico por separado y luego juntémoslos.

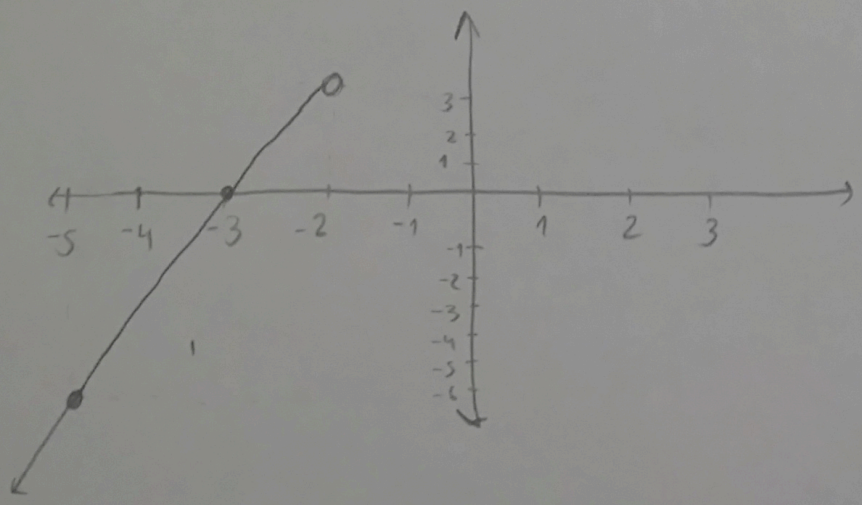
$3x+9$ es una recta.

$3x+9=0$

$3x=-9$

$x=-3$ $\Rightarrow$ cruza el eje X en $X=-3$

Si $X=-5 \Rightarrow f(x) = -53+9 = -15+9 = -6$



El "último" X de esta parte es $X=-2$

$3 \cdot -2 + 9 = -6+9 = 3$

Osea, llega hasta el punto $(-2, 3)$, pero hasta justo antes, porque el -2 no se incluye.

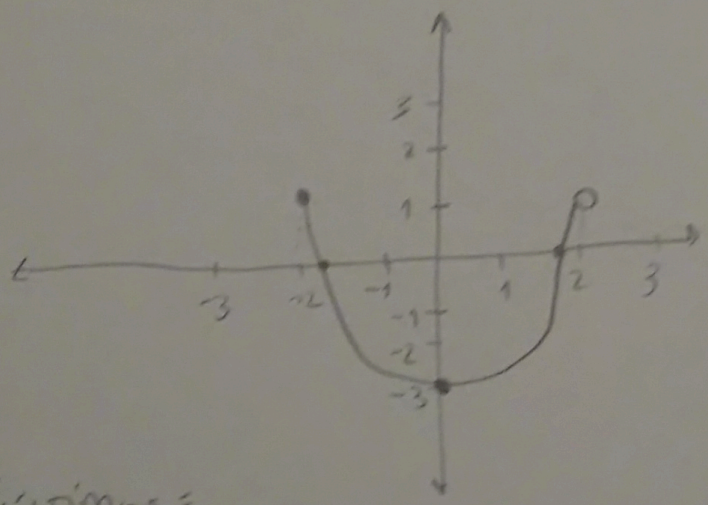
Lo marcamos con un "o".

x^2-3 es una parábola desplazada 3 "espacios" hacia abajo. Es decir, el vértice está en $(0,-3)$.

$x^2-3=0$

$x^2=\pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ cruza al eje x en $x=-\sqrt{3}$ y $x=+\sqrt{3}$

≈ -1.7 ≈ 1.7



Los "últimos" x que podemos tomar son -2 y 2

$(-2)^2-3=4-3=1$, este sí se incluye ya que

$f(x)=x^2-3$ si $x\in[-2,2)$

$(2)^2-3=4-3=1$, este no se incluye

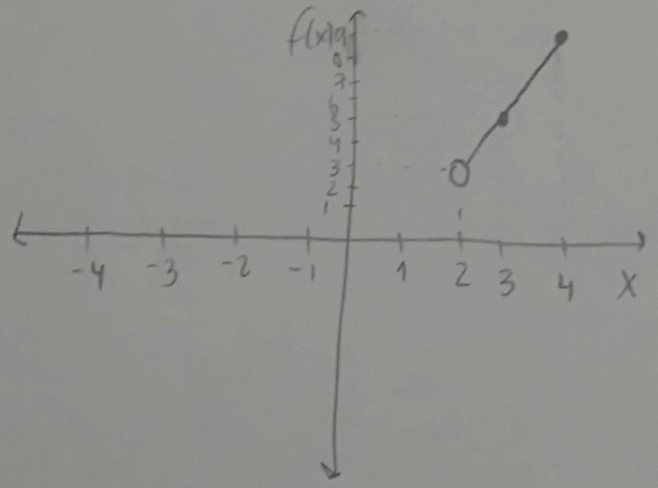
$2x-1$ es una recta

$2x-1=0$

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}$, pero $\frac{1}{2} \notin (2,+\infty)$ por lo que esta

recta no cruza al eje X.

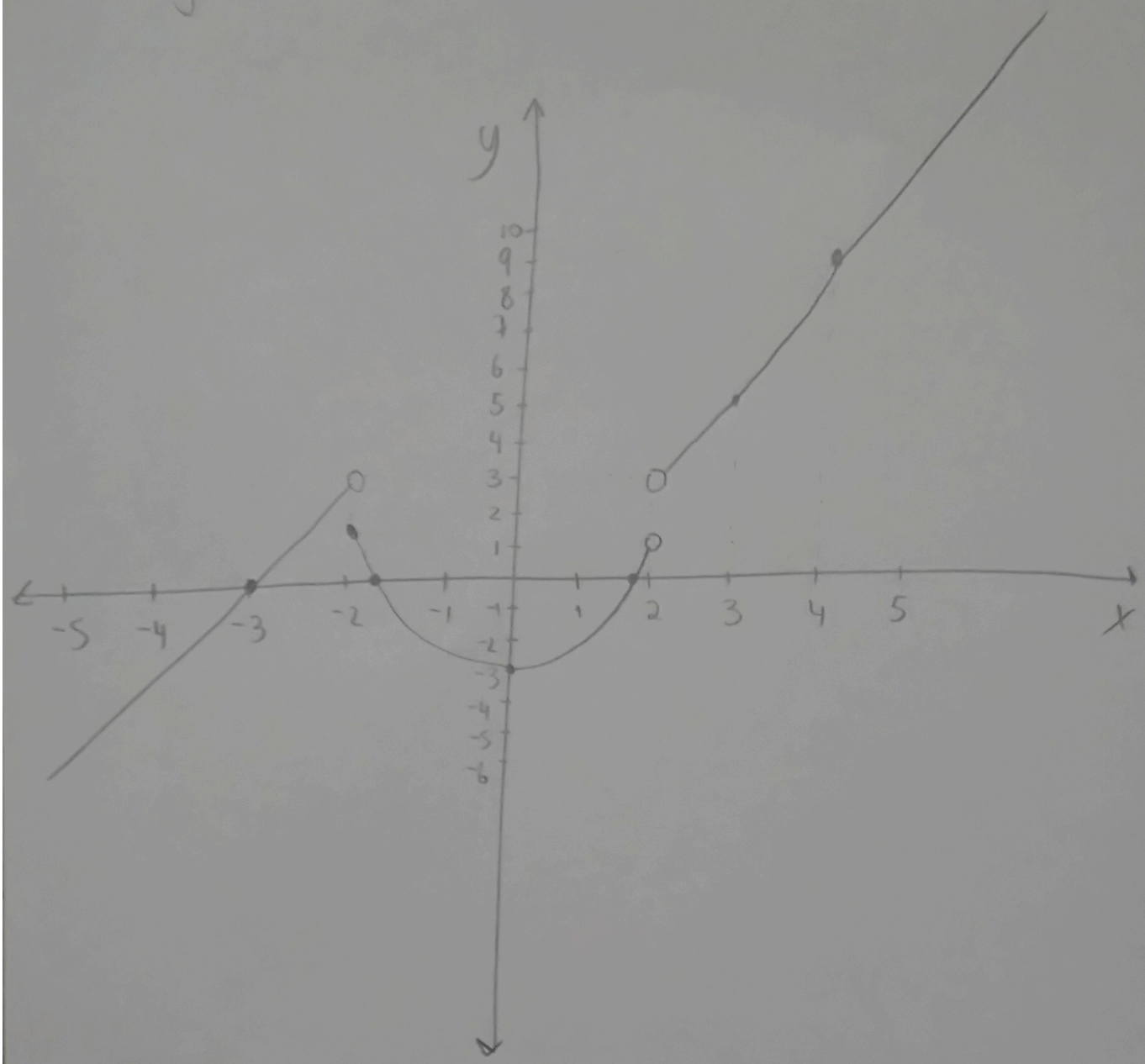


X	f(x)
3	5
4	9

Llega hasta $x=2$

$2 \cdot 2-1=3$, pero sin incluirlo

Ahora juntemos todo:



La función tiene 3 ceros (intersecciones con el eje x). Ceros = $\{-3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

No es inyectiva ya que tiene más de un cero, es decir, $f(-\sqrt{3}) = 0 = f(\sqrt{3})$ y $\sqrt{3} \neq -\sqrt{3}$.

No es sobreyectiva ya que $f(x)$ nunca es 3.