PAUTA AUXILIAR 7

P1] a) P.D.Q : φ es sobreyectiva

$\Leftrightarrow$ P.D.Q : $(\forall a \in A)(\exists (x,y) \in A \times B)$ tq' $f(x,y) = a$

Sea $a \in A$ y $m \in B$ cualquiera

Basta tomar $(x,y) = (a,m) \in A \times B$

y se cumple que $f(a,m) = a \quad \forall a \in A$.

"Por lo tanto" → $\therefore$ φ es sobreyectiva.

b) P D Q : φ es Biyectiva $\Leftrightarrow$ B tiene sólo 1 elemento

$\Rightarrow$] sea φ Biyectiva. Entonces en particular es inyectiva, es decir:

$(\forall (x,y), (w,z) \in A \times B)\ \varphi(x,y) = \varphi(w,z) \Rightarrow (x,y) = (w,z)$.

Pero $\varphi(x,y) = \varphi(w,z) \Rightarrow x = w$, no $(x,y) = (w,z)$; a menos que necesariamente $y = z$.

Es decir, $(\forall y, z \in B)\ y = z$. Esto significa que todos los elementos de B "son iguales", o sea, Hay un sólo elemento en B.

$\Leftarrow$] Sea $B = \{b\}$. veamos que $(\forall (x,b)(w,b) \in A \times B)$

$\varphi(x,b) = \varphi(w,b) \Rightarrow (x,b) = (w,b)$.

sea $(x,b), (w,b) \in A \times B$. $\varphi(x,b) = \varphi(w,b) \Rightarrow x = w$

y como $x = w$ y $b = b$, necesariamente $(x,b) = (w,b)$ y por lo tanto φ es inyectiva y entonces és Biyectiva. (En (a) demostramos sobreyectividad)

P2] a) $f \circ g = f(g(x)) = 8(5x-7)+5$

$= 40x - 56 + 5 = 40x - 51$

$$\boxed{f \circ g\,(x) = 40x - 51}$$

b) $f \circ f^{-1}(x) = id_{\mathbb{R}}$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$8(f^{-1}(x)) + 5 = x \quad /-5$

$8(f^{-1}(x)) = x - 5 \quad /:8$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x-5}{8}}$$

$g \circ g^{-1}(x) = id_{\mathbb{R}}$

$g(g^{-1}(x)) = x$

$5(g^{-1}(x)) - 7 = x \quad /+7$

$5(g^{-1}(x)) = x + 7$

$$\boxed{g^{-1}(x) = \frac{x+7}{5}}$$

c) $fog\left((fog)^{-1}\right) = x$

$40(fog)^{-1} - 51 = x \quad /+51$

$40(fog)^{-1} = x + 51 \quad /:40$

$$\boxed{(fog)^{-1} = \frac{x+51}{40}}$$

d) $g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{\left(f^{-1}(x)\right)+7}{5}$

$$= \frac{\frac{x-5}{8}+7}{5} = \frac{\frac{x-5+56}{8}}{5} = \frac{x+51}{8} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{x+51}{40}$$

$$\boxed{g^{-1} \circ f^{-1} = \frac{x+51}{40}}$$

ES IGUAL A $(fog)^{-1}$!!!

EXISTE UNA PROPIEDAD QUE DICE QUE:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

P3] a) Basta con encontrar 1 caso.

Por ejemplo:

$$f(-1) = \frac{|-1|-1}{|-1|+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(1) = \frac{|1|-1}{|1|+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Entonces $f(1) = f(-1)$ y $1 \neq -1$, por lo que f no es inyectiva

b) ya que $g: (-1,0] \to \mathbb{R}$, todos los x que "entran" a la función son menores o iguales a 0.

Recordemos que si $x \leq 0$, $|x| = -x$

Entonces podemos escribir $g(x)$ de la siguiente forma:

$$g(x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

Veamos que es inyectiva, es decir $\forall a,b \in (-1,0]$

$g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$.

sea $a, b \in (-1, 0] = Dom(g)$ tal que

$$g(a) = g(b)$$

$$\frac{-a-1}{-a+1} = \frac{-b-1}{-b+1}$$

$$(-a-1)(-b+1) = (-a+1)(-b-1)$$

$$ab - a + b - 1 = ab + a - b - 1$$

$$2b = 2a \Rightarrow a = b //$$

se concluye que g es inyectiva.

c) g ya es inyectiva, sólo falta ver que sea sobreyectiva.

Tenemos que encontrar un codominio tal que no "sobre" ningún elemento, es decir:

$(\forall y \in B)$ (codominio) $(\exists x \in (-1,0])$ tq' $f(x)=y$

$$g(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1}$$ ya que $x \in (-1,0]$, $|x| \in [0,1)$.

Entonces $|x|+1 > 0$ (positivo)

y $|x|-1 < 0$ (negativo)

Por lo que $g(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1} < 0$ (negativo)

¿Pero cualquier negativo? NO, veamos el más chico y más grande posible.

El menor valor que puede tomar $g(x)$ es $g(0) = \frac{-1}{1} = -1$

Si -1 estuviera en el dominio, el valor máximo sería $f(-1) = \frac{0}{1} = 0$. Pero el dominio llega hasta "justo antes". Entonces

$$B = [-1, 0)$$

P4] a) Dom(f):

$1-x^2$ tiene que ser mayor que 0 porque está dentro de una raiz.

ENTONCES $x \in [-1, 1]$ para que $1-x^2 \geq 0$.

$\therefore$ $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$

Im(f):

$\sqrt{(\text{cualquier cosa})}$ es siempre POSITIVO.

ADEMÁS, EL valor máximo DE $(1-x^2)$ es $(1-0) = 1$.

ENTONCES $f(x)$ nunca será mayor que $\sqrt{1} = 1$.

$\therefore$ $\text{Im}(f) = [0, 1]$

b) no es inyectiva ya que, por ejemplo,

$f(\frac{-1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$ y $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{2}$.

no es sobreyectiva porque el codominio es $\mathbb{R}$ y la imagen es sólo $[0, 1]$.

c) $B = [0,1]$ para que no se "repitan" los negativos al elevarlos al cuadrado.

Demostremos que $f: [0,1] \to [0,1]$ es biyectiva

(i) P.D.Q: f es inyectiva $(\forall a,b \in [0,1])\ f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$

Sea $a,b \in [0,1]$ tal que $f(a)=f(b)$

$$\sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-b^2} \quad /()^2$$

$$1-a^2 = 1-b^2 \quad /\cdot -1$$

$$a^2 = b^2 \quad /\sqrt{}$$

$$\pm a = \pm b \quad \text{pero } a,b \in [0,1]$$

entonces tienen que ser positivos

y por lo tanto $a=b$ //

(ii) P.D.Q: f es sobreyectiva $(\forall y \in [0,1])(\exists x \in [0,1])\ f(x)=y$

Sea $y \in [0,1]$

$f(x)=y$

$\sqrt{1-x^2}=y$

$1-x^2=y^2$

$1-y^2=x^2$

$x=\sqrt{1-y^2}$

Basta tomar $x=\sqrt{1-y^2}$ (existe y pertenece a $[0,1]$ ya que $y \in [0,1]$)

y entonces $f(x) = f\left(\sqrt{1-y^2}\right)$

$$= \sqrt{1-\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2} = \sqrt{1-(1-y^2} = \sqrt{y^2} = |y|$$

y ya que $y \in [0,1]$; $|y| = y$ //