P1

a) • Forma 1: Tabla de verdad

s	t	$[(s \Rightarrow t)$	$\wedge\, s]$	$\Rightarrow t$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V
				$(\star)$

Por $(\star)$ concluimos que la Proposición es siempre verdadera.

• Forma 2: con tautologías conocidas ("matraca")

$$[(s \Rightarrow t) \wedge s] \Rightarrow t \iff \overline{[(s \Rightarrow t) \wedge s]} \vee t \quad \text{(caracterización del implica)}$$

$$\iff [\overline{(s \Rightarrow t)} \vee \bar{s}] \vee t \quad \text{(De Morgan)}$$

$$\iff [(s \wedge \bar{t}) \vee \bar{s}] \vee t \quad (\overline{p \Rightarrow q} \iff p \wedge \bar{q})$$

$$\iff (s \wedge \bar{t}) \vee (\bar{s} \vee t) \quad \text{(asociatividad del } \vee)$$

$$\iff (s \wedge \bar{t}) \vee \overline{(s \wedge \bar{t})} \quad \text{(De Morgan)}$$

$$\iff V \quad (p \vee \bar{p} \iff V)$$

P1. Forma 3: Asumir que la hipótesis es verdadera y llegar a que la conlusión también lo es.

Asumimos entonces que $[(s \Rightarrow t) \wedge s]$ es verdadero. Ya que hay un $\wedge$ (”y”), ambas cosas deben ser verdaderas. Asumimos entnoces que s es verdadera y $(s \Rightarrow t)$ es verdadero. Pero si s es verdadero y $(s \Rightarrow t)$ también lo es, entonces t tiene que ser verdadero. Llegamos entonces a que t es verdadero.
Concluimos entonces que la proposición es verdadera ya que si la hipótesis es verdadera, también lo es la conclusión.

P2. (a) i. **Forma 1:** Por contradicción

Por contradicción, asumamos que la proposición es falsa. Ya que se trata de un implica, debe ser de la forma $V \Rightarrow F$. Asumimos entonces que $(p \Rightarrow r)$ es verdadero y que $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$ es falso.
Analicemos la segunda parte. Para que $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$ sea falso, debe ser de la forma $V \Rightarrow F$. Entonces $(p \wedge q)$ debe ser verdadero y r falso. Deducimos entonces que p y q son ambas verdaderas.
Veamos ahora la hipótesis. Habíamos asumido que era verdadera. Pero acabamos de deducir que p es verdadero y r es falso, por lo que la hipótesis sería de la forma $V \Rightarrow F$ y por ende sería falsa. Ya que habíamos asumido que era verdadera, llegamos a una contradicción.
Ya que el único caso falso lleva a una contradicción, esta proposición no puede ser falsa y por ende es siempre verdadera.

ii. **Forma 2:** ”Matraca”

$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$
$\iff (\overline{p} \vee r) \Rightarrow [\overline{(p \wedge q)} \vee r]$ *(caracterización del implica)*
$\iff (\overline{p} \vee r) \Rightarrow [(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee r]$ *(De Morgan)*
$\iff (\overline{p} \vee r) \Rightarrow [\overline{p} \vee \overline{q} \vee r]$ *(los parentesis no importan porque el $\vee$ es asociativo)*
$\iff \overline{(\overline{p} \vee r)} \vee [\overline{p} \vee \overline{q} \vee r]$ *(caracterización del implica)*
$\iff (p \wedge \overline{r}) \vee [\overline{p} \vee \overline{q} \vee r]$ *De Morgan*
$\iff [(p \wedge \overline{r}) \vee \overline{p}] \vee \overline{q} \vee r$ *(asociatividad del $\vee$)*
$\iff [(p \vee \overline{p}) \wedge (\overline{r} \vee \overline{p})] \vee \overline{q} \vee r$ *(distrubuitividad)*
$\iff [V \wedge (\overline{r} \vee \overline{p})] \vee \overline{q} \vee r$
$\iff (\overline{r} \vee \overline{p}) \vee \overline{q} \vee r$
$\iff (\overline{r} \vee r) \vee \overline{p} \vee \overline{q}$ *(asociatividad y conmutatividad)*
$\iff V \vee \overline{p} \vee \overline{q} \iff V$
Concluimos entonces que la proposición es verdadera.

(b) i. **Forma 1:** Aumir que la hipótesis es verdadera y llegar a que la conlusión también lo es.

Asumamos entonces que $[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r]$ es verdadero. Ya que son 3 proposiciones unidas por un $\wedge$, cada una de ellas debe ser verdadera. Podemos deducir inmediatamente que r es V. Ahora, para que $(\overline{r} \vee q)$ sea verdadera, necesitamos que alguna de las dos partes al menos lo sea. Pero como r es V, $\overline{r}$ es F, pot lo que q debe der V. Necesitamos también que $(p \Rightarrow \overline{q})$ sea V y sabemos que $\overline{q}$ es F. Entonces para que no nos quede algo de la forma $V \Rightarrow F$ (porque necesitamos que sea verdadero), p necesariamente tiene que ser F.

Concluimos entonces que $\overline{p}$ es verdadero si la hipótesis es verdadera, y por lo tanto la proposición es siempre verdadera.

ii. **Forma 2:** Por contradicción.

Asumimos que la proposición es falsa. Por lo tanto se asume que $[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r]$ es verdadera y $\overline{p}$ es falsa (que es lo mismo que decir que p es verdadera).
Con el mismo razonamiento de la forma 1, llegamos a que si la hipotesis es verdadera, p es falsa. Pero acabábamos de asumir que p era verdadera. Se produce entonces una contradicción.
Ya que el único caso falso ($V \Rightarrow F$) lleva a una contradicción, podemos concluir que la proposición es siempre verdadera.

P3. (a) $(\forall x, y) \ \ \overline{p(x,y)}$

(b) $(\forall x, y) \ \ p(x,y)$

(c) $(\exists x, y, z) \quad p(x,y) \wedge p(y,z)$