Profesores: Claudio Falcón, Nelson Zamorano.
Auxiliares: Lerko Araya, Bárbara Blanco, Eva Díaz, Natalia Díaz, Tomás Lara, Camilo Levenier, Belén Muñoz, Andrés Olivares, Camila Santibáñez.

Pauta P19,P20 - Guía 3

P19) Tanto el campo como la fuerza gravitacional siguen el principio de superposición, es decir:

$$g_{esferacompleta} = g_{esferaconcavidad} + g_{cavidadconmasa}$$

Por lo que basta tener la aceleración causada por la esfera maciza y la cavidad con masa sobre m para obtener la aceleración pedida.

Para ello calculamos primero la masa de la cavidad rellena y la masa de la esfera maciza:

$$\frac{M_{total}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{M_{total} - M}{\frac{4\pi(\frac{R}{2})^3}{3}} \rightarrow M_{total} = \frac{8M}{7}$$

Por lo que la masa de la cavidad $M_{cavidad} = \frac{M}{7}$. Sigue que, como $F_{gravedad} = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{r^2}$ con r tomado desde el centro de cada esfera.

Luego $g_{esferacompleta} = \frac{G\frac{8M}{7}}{(\frac{3R}{2})^2}$ y $g_{cavidadconmasa} = \frac{G\frac{M}{7}}{(\frac{3R}{2} - \frac{R}{2})^2}$
$g_{esferaconcavidad} = g_{esferamaciza} - g_{cavidadconmasa} = \frac{32GM}{63R^2} - \frac{GM}{7R^2} = \frac{GM}{R^2}(\frac{32}{63} - \frac{1}{7}) = \frac{23GM}{63R^2}$

Donde $\frac{23GM}{63R^2}$ es la aceleración pedida.

P20) En el inicio podemos señalar que no hay velocidad, pues ambas masas se dejan en reposo y por tanto no hay energía cinética, por otro lado la energía potencial gravitatoria es $E_p = \frac{GMm}{r}$ con $r \rightarrow \infty$ por lo que como el denominador es muy grande $E \rightarrow 0$. Es decir la energía inicial del sistema es nula.

Por otro lado sabemos que cuando ambas masas se encuentren a una distancia D, la energía final $E_f = \frac{1}{2}M{V_M}^2 + \frac{1}{2}m{V_m}^2 - \frac{GMm}{D}$ además, por dinámica tenemos que $F_{gravedad} = ma_m = Ma_M$ pues la única fuerza existente entre ambas masas es la fuerza de gravedad. Con esto tenemos que $a_m = \frac{Ma_M}{m}$ y con las ecuaciones de velocidad de cada masa tenemos que $V_m = a_m t$ y $V_M = a_M t$, sabemos que para un mismo tiempo t_D las velocidades serán iguales a las de la ecuación de energía y el tiempo transcurrido será el mismo, luego, reemplazando el tiempo en las ecuaciones de velocidad: $V_m = \frac{a_m V_M}{a_M}$ y usando la relación entre las aceleraciones $a_M = \frac{ma_m}{M}$ obtenemos: $V_m = \frac{a_m V_M}{\frac{ma_m}{M}} = \frac{MV_M}{m}$
Reemplazando esta velocidad en la ecuación de energía y usando la conservación respecto al instante inicial:
$E_i = 0 = E_f = \frac{1}{2}M{V_M}^2 + \frac{1}{2}m(\frac{MV_M}{m})^2 - \frac{GMm}{D} \rightarrow V_M = m\sqrt{\frac{2G}{D(M+m)}}$ y $V_m = M\sqrt{\frac{2G}{D(m+M)}}$

Como ambos cuerpos van en sentido contrario se perciben como si se movieran más rápido, tal como dos autos que se cruzan en la carretera cuando van en sentido contrario.
$V_{rel} = V_M + V_m = (M+m)\sqrt{\frac{2G}{D(M+m)}} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{D}}$