FM404-1 - Matemática 4: Teoría de Cálculo Diferencial
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Cristóbal Valenzuela y Sebastián Urzúa

Auxiliar 5.5: Supremo versión $\mathcal{SWAG}$

5.5 de Enero de 2015

P1. Demuestre las siguientes proposiciones:

(a) Sean A, B conjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}$ con $A \subseteq B$. Demuestre que:

$$\text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

(b) Sean A, B, C subconjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}$. Pruebe que si $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $\exists z \in C$ tales que $x + y \leq z$, entonces $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C)$

P2. El objetivo de esta pregunta es demostrar la famosa propiedad arquimediana:

(a) Muestre que $[x] \in \mathbb{N}$ para cualquier x y muestre que $\forall x \in \mathbb{R} : [x] \leq x < [x] + 1$ (Recuerde que $[x] = \sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$) *Hint: Use la caracterización por ε del supremo*

(b) Pruebe que los números naturales no son acotados superiormente

(c) Demuestre que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$, tal que $n \cdot \varepsilon > 1$. Esta es la llamada propiedad arquimediana.

P3. Para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, se pide determinar, en caso de existir, supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : (x^3 - x) \leq x\}; \quad B = \{\sin(\tfrac{n\pi}{2}) : n \in \mathbb{N}\}; \quad C\{x > 0 : \sin(\tfrac{1}{x}) = 0\}$$

P4. Sean $A, B \neq \emptyset$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente.

(a) Argumente por qué existe $\sup(A \cup B)$ y demuestre que $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$

(b) Pruebe que si $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \sup(A \cap B) \leq \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$ (¿Qué pasa con la desigualdad hacia el otro lado?)