Auxiliar 9

Matemática 1, sección 1.
Profesor: Felipe Célèry.
Auxiliar: Raimundo Saona

Graficando una función

Considere la siguiente función y responda:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, -1) \\ x^3 & x \in (-1, 1) \\ 1 & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

1) ¿Cuáles son los ceros de la función?
2) Indique los intervalos donde la función es negativa y donde es postitiva.
3) Indique paridad, si es que hay.
4) Encuentre la monotonía de la función.
5) Encuentre los valores de f(x), cuando x toma los valores: $0, \frac{1}{2}, 1$.
6) Bosqueje la función.

PAUTA:

Para analizar una función por partes, lo que podemos hacer es analizar cada una de las funciones que componen a la función por separado y luego analizar la función por partes en base a esta información.

Ceros: x = 0 es el único cero de la función, pues:

$$f(0) = 0 \wedge \forall x \neq 0 \ f(x) \neq 0$$

Signos: Después de analizar cada una de las funciones que componen a f $(-1, x^3, 1)$, se concluye que:

$$\forall x \in (-\infty, 0) \ f(x) < 0$$
$$\forall x \in (0, +\infty) \ f(x) > 0$$

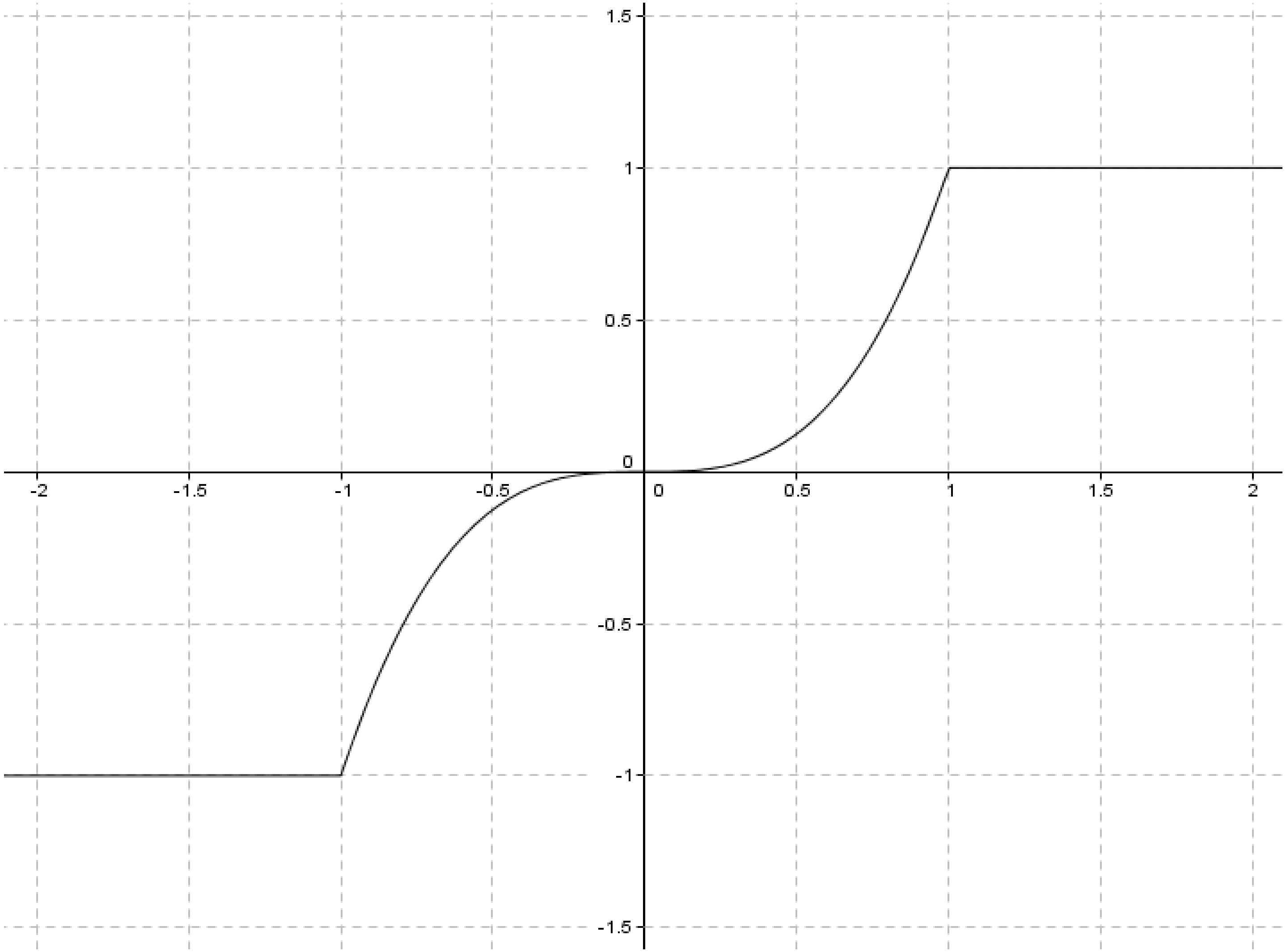
Paridad: El auxiliar pasado vimos que la función es impar. Para hacer esto hay que demostrar que:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)$$

Esto se hace analizando 3 casos: $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 1)$ y $x \in (1, +\infty)$.

Monotonía: Se puede mostrar que la función es siempre creciente. Una forma de ver esto es analizar cada una de las funciones por separado y luego concluir.

Valores: Simplemente es reemplazar x con los valores que nos dan en f(x). Así obtenemos algunos puntos del gráfico que sabemos exactamente dónde se ubican. Esto guiará nuestro bosquejo.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Graficando una función

Considere la siguiente función y responda:

$$f(x) = \begin{cases} |x+5| & x \in (-\infty, 3) \\ (x-3)^2 - 2 & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

1) ¿Cuáles son los ceros de la función?
2) Indique los intervalos donde la función es negativa y donde es postitiva.
3) Indique paridad, si es que hay.
4) Encuentre la monotonía de la función.
5) Encuentre los valores de f(x), cuando x toma los valores: $-5, -4, 3, 4$.
6) Bosqueje la función.

PAUTA:

Para analizar una función por partes, lo que podemos hacer es analizar cada una de las funciones que componen a la función por separado y luego analizar la función por partes en base a esta información.

Ceros: x = -5, x = $3 + \sqrt{2}$. Recordar que $3 - \sqrt{2}$ no es cero de f, pues: $3 - \sqrt{2} < 3$.

Signos: Después de analizar cada una de las funciones que componen a f ($|x+5|, (x-3)^2 - 2$), se concluye que:

$$\forall x \in (-\infty, 3) \cup (3+\sqrt{2}, +\infty) \;\; f(x) > 0$$
$$\forall x \in (3, 3+\sqrt{2}) \;\; f(x) < 0$$

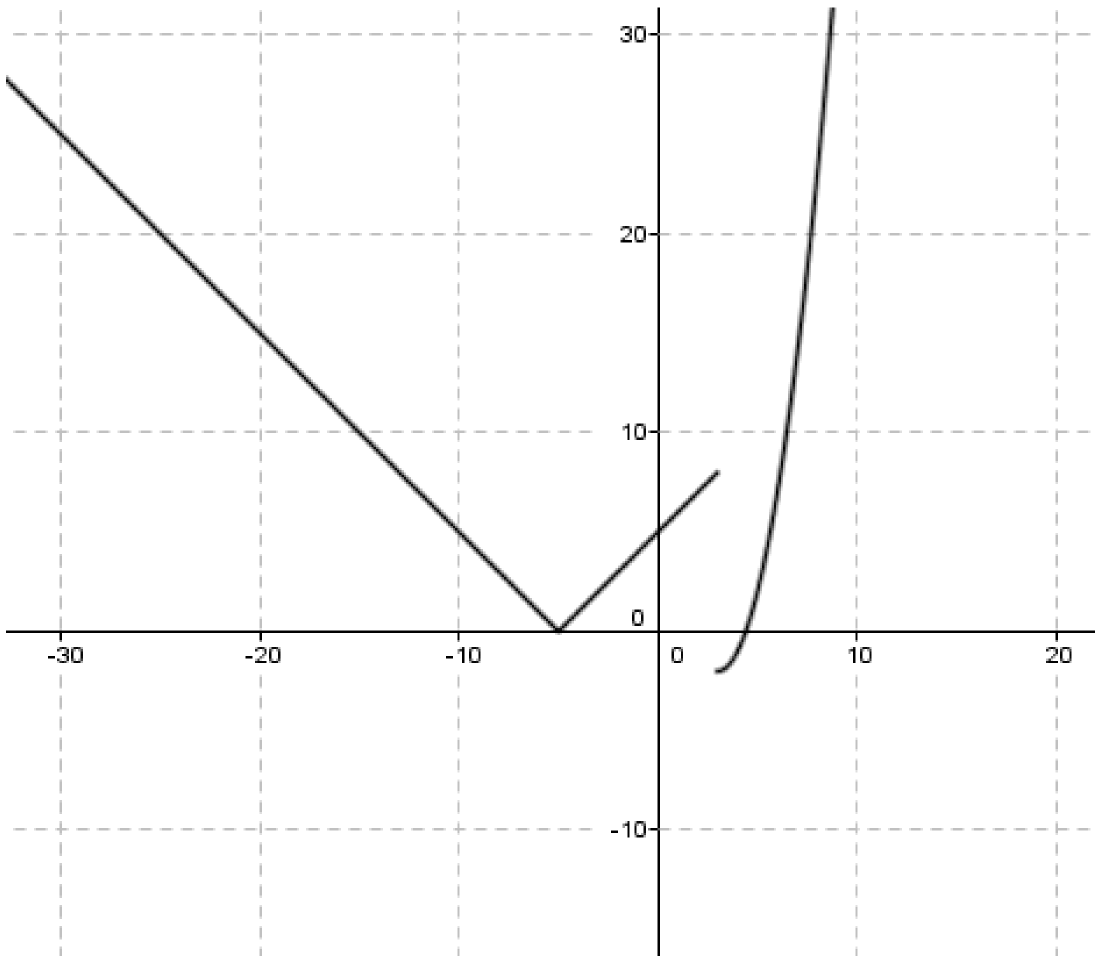
Paridad: La función no es ni par ni impar. Para ver que esto es cierto, basta tomar un ejemplo concreto, tomemos x = 5:

$$f(-5) = |(-5) + 5| = 0$$
$$f(5) = ((5) - 3)^2 - 2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

Así, $f(-5) \neq f(5), -f(5)$.

Monotonía: Para ver qué pasa aquí, se recomienda analizar cada una de las funciones componentes de f y luego conluir.

Valores: Simplemente es reemplazar x con los valores que nos dan en f(x). Así obtenemos algunos puntos del gráfico que sabemos exactamente dónde se ubican. Esto guiará nuestro bosquejo.


30
20
10
0
-10
-30
-20
-10
0
10
20

Encuentre (f o g)

Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = 3x + 2$$
$$g(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Determine explícitamente la función (g o f) y la función (f o g) y responda para cada una: ¿Cuál es el dominio de la función?

PAUTA:

Para encontrar la composición de funciones hay que recordar que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Luego, basta reemplazar las definiciones de f y g para obtener que:

$$(g \circ f)(x) = \frac{3x+2}{(3x+2)^2+1}$$
$$(f \circ g)(x) = 3\frac{x}{(x)^2+1} + 2$$

En ambos casos el dominio de la función resultante es $\mathbb{R}$. Para esto, se recuerda que: $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$.

Biyección, composición e inversa

Demuestre que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos funciones biyectivas, entonces (g o f) es biyectiva y se tiene que:

$$(g \text{ o } f)^{-1} = f^{-1} \text{ o } g^{-1}$$

PAUTA:

No la hicimos. Después del trabajo dirgido deberían tener una idea de cómo hacerla.

El pensamiento es el siguiente:

Antes que todo, debemos probar que (g o f) es biyectiva. Para esto podemos utilizar la hipótesis de que tanto f como g son biyectivas.

Luego, dada una función f biyectiva, su inversa es la única función que cumple con:

$$\forall x \in Dom(f)\ f^{-1}(f(x)) = x$$

Luego, dada una función f biyectiva, su inversa es la única función que cumple con:

$$\forall x \in Dom(f)\ f^{-1}(f(x)) = x$$

Luego, si mostramos que:

$$\forall x \in Dom(g \circ f)\ (f^{-1} \circ g^{-1})((g \circ f)(x)) = x$$

Habremos mostrado que $(f^{-1} \circ g^{-1})$ es la inversa de la función $(g \circ f)$, es decir:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Paridad y funciones

Sea f una función par y g una función impar, demuestre que:

$$f \cdot g \text{ es una función impar}$$

PAUTA:

Para demostrar que la función es impar, basta calcular la expresión $f \cdot g(-x)$.

En el desarrollo utilizamos la definición de función producto:

$$f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Luego, utilizamos las hipótesis sobre la paridad de f y de g, para conluir que:

$$f \cdot g \text{ es una función impar}$$

Paridad y funciones

Sea f una función cualquiera, demuestre que existen dos funciones g y h tal que:

$$(f = g + h) \wedge (g \text{ es par}) \wedge (h \text{ es impar})$$

PAUTA:

El truco de esta pregunta está en definir las siguientes funciones:

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \; ; \; h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Se demuestra fácilmente las tres proposiciones que cumplen g y h.