25 años

Escuela de Verano

Para estudiantes de Educación Básica y Media

Universidad de Chile

Teoría de funciones reales

Apuntes del curso

Versión beta

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Escuela de Verano

Chile - 18 de diciembre de 2013

APUNTES DEL CURSO TEORÍA DE FUNCIONES REALES

Escuela de Verano
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile.

Autores:

Roberto Cominetti
Martín Matamala
David Gomez
Iván Rapaport

Editor:

Benjamín Ruiz Muñoz

Coordinador:

Felipe Célèry Céspedes

Ilustraciones:

GeoGebra, software libre.
http://www.geogebra.org/cms/es/

Fecha de edición: 18 de Diciembre de 2013.

Índice general

Capítulo 1. Lógica y Conjuntos 1
1.1. Lógica matemática 1
1.1.1. Proposiciones lógicas 1
1.1.2. Conectivos lógicos 1
1.1.3. Tautologías 5
1.1.4. Función proposicional y cuantificadores 9
1.2. Teoría de Conjuntos 12
1.2.1. Conjuntos, inclusión y pertenencia 12
1.2.2. Operaciones entre conjuntos 14
1.2.3. Cuantificando sobre conjuntos 20
1.2.4. Producto de conjuntos 21

Capítulo 2. Geometría analítica 23
2.1. Vectores en el plano y el espacio 23
2.1.1. Números reales ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ...$) 23
2.1.2. Igualdad de Vectores 25
2.2. Geometría Analítica 36
2.2.1. Rectas 36
2.2.2. Traslación del sistema de coordenadas. 41
2.2.3. Raíz Cuadrada 43
2.2.4. Parábolas 44
2.3. Secciones Cónicas 49
2.3.1. Elipse 49
2.3.2. Hipérbola 52

Capítulo 3. Funciones 55
3.1. Definición de función y propiedades generales 55
3.1.1. Funciones 55
3.1.2. Conjunto imagen y conjunto preimagen 57
3.1.3. Ceros y recorrido de una función 59
3.1.4. Crecimiento de una función 59
3.1.5. Paridad de una función 60
3.1.6. Funciones periódicas 61
3.1.7. Funciones acotadas 62
3.1.8. Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad 63
3.1.9. Gráfico de funciones inyectivas y sobreyectivas 65
3.1.10. Composición de funciones 66
3.1.11. Función inversa 66
3.2. Funciones Básicas 68

3.2.1. Función lineal afín 68
3.2.2. Función cuadrática 70
3.2.3. Traslación y escalamiento de una función 72
3.2.4. Función definida por partes 74
3.2.5. Función valor absoluto o módulo 75
3.2.6. Función Raíz 75
3.2.7. Función escalón o cajón inferior o parte entera 76
3.2.8. Otras maneras de obtener nuevas funciones 77
3.3. Otras funciones importantes 79
3.3.1. Funciones Polinomiales y racionales 79
3.3.2. Función Exponencial y Logaritmo 81
3.3.3. Medida de ángulos en radianes 84
3.3.4. Funciones Trigonométricas 85
3.3.5. Funciones Recíprocas 89
3.3.6. Propiedades Importantes 90

Bibliografía 91

CAPÍTULO 1

Lógica y Conjuntos

SECCIÓN 1.1

Lógica matemática

Definición 1.1 (Proposiciones)**.** En un intento por sistematizar el razonamiento matemático nace lo que llamaremos lógica. En lógica se trabaja con frases o expresiones con "valor de verdad" que son las llamadas **proposiciones**, estas pueden ser Falsas o Verdaderas, y normalmente las denotaremos por las letras p, q, r.... También veremos que es posible "conectar" proposiciones para construir otras nuevas, a estas les llamaremos proposiciones compuestas.

Ejemplo:

- p:" La pizarra es negra".
- q:" Este es el curso de Matemáticas".
- $r:\ 3 \geq 1$
- s :"Es temprano".
- t: "Tengo sueño".
- u :"Está nublado".
- v :"Está lloviendo".

1.1.1. Proposiciones lógicas

Definición 1.2. Negación: Dada una proposición p es natural definir la proposición opuesta, es decir su negación, por ejemplo para la proposición "Está lloviendo", su negación será "No está lloviendo", de manera que si una proposición es verdadera, entonces su negación tendrá valor de verdad falso, de esta misma manera, si la proposición es falsa, entonces su negación será verdadera. La negación de la proposición p la denotaremos como $\sim p$ [1] y se lee como "no p".

1.1.2. Conectivos lógicos

Tablas de verdad

Utilizaremos las **tablas de verdad** para representar los valores de verdad que tomará una proposición compuesta, en función de todos los posibles valores de verdad que pueden tomar las proposiciones en juego, por ejemplo:

Tabla de verdad de la negación

p	$\sim p$
V	F
F	V

Notemos que a medida que la cantidad de proposiciones en juego aumenta, el tamaño de la tabla de verdad es tan grande como 2^n, donde n es el número de proposiciones.

Una variable proposicional (p)

p
V
F

Dos variables proposicionales (p, q)

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tres variables proposicionales (p, q, r)

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Definición 1.3. Y lógico o de conjunción:Dada dos proposiciones p y q, podemos construir la proposición $p \wedge q$ que se lee "p y q", esta proposición será verdadera siempre y cuando ambas proposiciones son verdaderas de manera simultánea, por ejemplo, a partir de las proposiciones "Está lloviendo" y "Tengo hambre", podemos formar la proposición "Está lloviendo y tengo hambre" que será verdadera, siempre y cuando ambas proposiciones sean verdaderas.

Tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición 1.4. O lógico o disyunción:Dada dos proposiciones p y q, podemos construir la proposición $p \vee q$ que se lee "p o q", esta proposición será verdadera solo si al menos una de las proposiciones, ya sea p o q o ambas son verdaderas, por ejemplo, a partir de las proposiciones "Está lloviendo" y "Tengo hambre", podemos formar la proposición "Está lloviendo o tengo hambre", para que esta proposición sea verdadera basta que al menos una de las dos, ya sea "Está lloviendo" o "Tengo hambre" sea verdadera.

Tabla de verdad

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición 1.5. Implicación:Dada dos proposiciones p y q, podemos construir la proposición $p \Rightarrow q$ y se lee "p implica q" también se lee como "si p, entonces q", que trata de representar que cada vez que p es verdadera, q obligatoriamente debe ser verdadera también, para estudiar su valor de verdad, notaremos que la única forma en que se puede asegurar que la proposición es falsa es cuando p es verdadera y q es falsa, por ejemplo, es fácil convencerse que la proposición "Si esta lloviendo, entonces está nublado" es verdadera, además no es importante si no esta lloviendo, lo único que importa es que, si efectivamente está lloviendo, entonces necesariamente está nublado, por lo tanto no puede ocurrir que esté lloviendo y no esté nublado.

Tabla de verdad

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observación 1.1. Notar que la clave de la tabla de verdad de $p \Rightarrow q$ es la segunda fila, se sabe que $p \Rightarrow q$ será falso cuando p sea verdadero y q falso.

Definición 1.6. Equivalencia:Dada dos proposiciones p y q, la proposición[2] $p \Leftrightarrow q$ y se lee "p es equivalente q"también se lee como "p si y solo si q", será verdadera siempre y cuando p y q tengan exactamente el mismo valor de verdad.

Tabla de verdad

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observación 1.2. Dos proposiciones se dicen **siempre equivalentes** si tienen la misma tabla de verdad.

Ejemplo:

- Demostrar que $p \Rightarrow q$ es equivalente a $(\sim p) \vee q$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim p) \vee q$	$p \Rightarrow q$	$((\sim p) \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Como las tablas de verdad son iguales, entonces son equivalentes.

- Demostrar que $p \Rightarrow q$ es equivalente a $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim q)$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$	$p \Rightarrow q$	$[(\sim q) \Rightarrow (\sim p)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Como las tablas de verdad son iguales, entonces son equivalentes.

Definición 1.7 (Tautología)**.** Se dice que una proposición es una **tautología** si su tabla de verdad es verdadera para todos los casos.

1.1.3. Tautologías

Observación 1.3. Dos proposiciones A y B son equivalentes si la proposición $A \Leftrightarrow B$ es una tautología (ver el ejemplo anterior).

Ejemplo:

- Tabla de verdad de la proposición $(\sim p) \wedge (\sim q)$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim q)$	$(\sim q) \wedge (\sim p)$	$\sim (p \vee q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

- Tabla de verdad de la proposición $(\sim p) \vee (\sim q)$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim q)$	$(\sim q) \vee (\sim p)$	$\sim (p \vee q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

> Notar que:
> $(\sim q) \wedge (\sim p) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$
> $(\sim q) \vee (\sim p) \not\Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

> **Ejemplo:**
>
> Demostrar que $p \Leftrightarrow q$ es equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
V	V	V	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

> Se tiene ya que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ es una tautología.

Proposición 1.8 (Tautologías básicas)**.** *Sean p,q y r proposiciones lógicas, se tiene que:*

1. *Idempotencia:*
   - $p \wedge p \Leftrightarrow p$
   - $p \vee p \Leftrightarrow p$
2. - $p \vee F \Leftrightarrow p$
   - $p \wedge F \Leftrightarrow F$
3. - $p \vee V \Leftrightarrow V$
   - $p \wedge V \Leftrightarrow p$
4. - $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$
   - $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
5. *Conmutatividad:*
   - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
   - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
6. *Asociatividad:*
   - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
   - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
7. *Dsitributividad:*
   - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. *De Morgan:*
   - $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
   - $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
9. $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
10. - $p \wedge q \Rightarrow p$
    - $p \Rightarrow p \vee q$
11. *Reflexividad:*
    - $p \Rightarrow p$
    - $p \Leftrightarrow p$
12. *Simetría de la equivalencia:* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
13. *Caracterización del implica:* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
14. *Contrarecíproca* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$

15. *Caracterización de la equivalencia:* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
16. *Transitividad:*
    - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
    - $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
17. $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$

DEMOSTRACIÓN. Estas tautologías se prueban usando tablas de verdad, y las cuatro últimas son particularmente útiles para demostrar teoremas. □

Métodos de verificación de Tautologías

Además de las tablas de verdad existen otros métodos para determinar si una proposición es una tautología, estos pueden ser mucho más efectivos que las tablas de verdad (basta pensar en una tabla de verdad cuando hay cuatro o más proposiciones en juego).

Método 1

Podemos verificar de manera algebraica asumiendo las tautologías básicas como conocidas[3], aquí se utilizará fuertemente la transitividad de la equivalencia, de manera que armemos una cadena de equivalencias hasta llegar a lo que buscamos.

Ejemplo:

Demostrar que:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (p \wedge q)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{array}{rccc}
TB15 & (p \Leftrightarrow q) & \Leftrightarrow & [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\
TB13 & & \Leftrightarrow & ((\sim p) \vee q) \wedge ((\sim q) \vee p) \\
TB7 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \vee q) \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \vee q) \wedge p] \\
TB7 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee [q \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \wedge p] \vee (q \wedge p) \\
TB4,2 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (q \wedge p) \\
TB16 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (q \wedge p)
\end{array}$$

□

Método 2

En estas demostraciones se acepta explorar la tabla de verdad de la proposición, desechando los casos "fáciles".

Ejemplo:

[3]Es decir podemos usarlas sin demostrarlas. Cada vez que se usen y sea necesario recalcarlo se llamarán como TBn , donde n es el número asignado a la tautologia básica en este apunte.

Demostrar que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$$

Llamaremos $A \Leftrightarrow [(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)]$ y $B \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$, la proposición es $A \Rightarrow B$ los casos fáciles son cuando el valor de A es F, ya que la proposición se hace verdadera, el caso interesante es qué pasa si A es verdadera, y lo que queremos concluir es que B es verdadera.

Si $A \Leftrightarrow [(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)]$ es verdadera entonces tenemos que:

- $(p \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V$
- $(r \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$

Por otro lado para concluir que $B \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$ basta analizar el caso en que el valor de verdad de p es verdadero. Por lo tanto tenemos que si $p \Leftrightarrow V$, entonces:

- $$\begin{array}{ccc} (p \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V & \Rightarrow & (V \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V \\ TB13 & \Rightarrow & (F \vee (\sim q)) \Leftrightarrow V \\ TB3 & \Rightarrow & (\sim q) \Leftrightarrow V \\ & \Rightarrow & q \Leftrightarrow F \end{array}$$
- $$\begin{array}{ccc} (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow V & \Rightarrow & (r \Rightarrow F) \Leftrightarrow V \\ & \Rightarrow & r \Leftrightarrow F \end{array}$$

Con lo que B $\Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r)) \Leftrightarrow (V \Rightarrow V) \Leftrightarrow V$, con esto queda demostrado que la proposición es una tautología.

Método 3 (Reducción al absurdo)

Este método se aplica óptimamente en una proposición de la forma $A \Rightarrow B$ y usando el hecho que $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$. La idea es suponer que la negación es verdadera y concluir que esto no puede ser.

Ejemplo:

Demostrar vía reducción al absurdo que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$$

Supongamos que $[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \wedge [\sim (p \Rightarrow (\sim r))]$ es verdadera. Se tiene que:

- $[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \Leftrightarrow V$
  Con lo que:
  - $A \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V$
  - $B \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$
- $([\sim (p \Rightarrow (\sim r))] \Leftrightarrow V) \Leftrightarrow ([(p \Rightarrow (\sim r))] \Leftrightarrow F)$

Como $[(p \Rightarrow (\sim r))] \Leftrightarrow F$, entonces $p \Leftrightarrow V$ y $r \Leftrightarrow V$, con esto, como $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow V$, si q es verdadero entonces A es falso, y si q es falso, entonces B es falso, luego q no puede ser ni verdadero ni falso, lo que es una **contradiccón**, en consecuencia la proposición es una tautología, puesto que su negación no puede ser verdadera.

Más aun el método de reducción al absurdo es un método general de demostración, basado en la contrarecíproca, la idea es que se quiere demostrar una cierta propiedad Q, lo que vemos como

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n \Rightarrow Q$$

Donde $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n$ corresponden a las hipótesis y todo lo que conocemos en matemáticas, lo que sabemos que es verdad. Esto es lo mismo que

$$\sim Q \Rightarrow \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \sim p_3 \vee ... \vee \sim p_n$$

Entonces se parte de $\sim Q$ (se supone falso lo que se quiere probar) y se llega a $\sim p_i$, lo cual es una "contradicción", algo que sabemos que es falso, con lo que

$$\sim Q \Rightarrow F$$

Luego se concluye Q.

Ejemplo:

Probaremos que no hay ningún racional cuyo cuadrado es 2 (o equivalentemente, $\sqrt{2}$ no es racional), donde los racionales son los números reales que se pueden expresar como una fracción.

Demostración. Supongamos por contradicción que existe un racional cuyo cuadrado es 2, o sea existen m, n números enteros con $n \neq 0$ tal que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Además podemos suponer que m y n son coprimos[4].
Luego se tiene que: $\Rightarrow m^2 = 2n^2$
$\Rightarrow m^2$ es par, por lo tanto m es par, luego remplazamos $m = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (2k)^2 = 2n^2$
$\Rightarrow 4k^2 = 2n^2$
$\Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ es par, entonces n es par $(n = 2j,\ j$ algún entero $)$.
Luego 2 es factor común de m y n pero habíamos supuesto que no tenían factores en común, lo que lleva a una contradicción, por lo tanto no existen m, n enteros tal que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

□

Definición 1.9 (Función proposicional)**.** La proposición $p(x) \Leftrightarrow x > 3$ no es una proposición estrictamente, para que lo sea se le debe dar valores a x, a este tipo de proposiciones[5] se les llama **proposiciones abiertas** o **funciones proposicionales**.

Ejemplo:

Algunas proposiciones abiertas:

- $p(x) \Leftrightarrow$ "x es mujer".
- $q(x) \Leftrightarrow x = 4$.
- $r(x) \Leftrightarrow$ "y es múltiplo de 3".
- $s(x, y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$.
- $t(x, y, z, n) \Leftrightarrow x^n + y^n = z^n$.

Definición 1.10 (Cuantificador Universal)**.** Si bien $p(x) \Leftrightarrow$ "x es mujer" es una proposición abierta, si la cambiamos por " todos los x de esta sala son mujeres" obtiene una proposición, esto es lo que se conoce como **cuantificador universal**, en general se escribe como $(\forall x)\ p(x)$. y se lee como "para todo x, $p(x)$".

Ejemplo:

Algunas proposiciones que usan el cuantificador universal.

- La proposición $(\forall x)\ x = 4$, es falsa ya que $3 \neq 4$.
- La proposición $(\forall y)\ y$ es múltiplo de 3, es falsa ya que 5 no es múltiplo de 3.
- La proposición $(\forall x)\ x = x$, es verdadera.

Definición 1.11 (Cuantificador Existencial)**.** Siguiendo con el ejemplo anterior $p(x) \Leftrightarrow$ "x es mujer", otra manera de definir una proposición a partir de una proposición abierta es si la cambiamos por " exisite un x en esta sala que es mujer", esto se conoce como **cuantificador existencial**, en general se escribe como $(\exists x)\ p(x)$ y se lee como "existe x tal que $p(x)$". i

Ejemplo:

Algunas proposiciones que usan el cuantificador existencial.

- La proposición $(\exists x)\ x = 4$, es verdadera, tomando x como 4.
- La proposición $(\exists y)\ y$ es múltiplo de 3, es verdadera, por ejemplo $y = 9$.
- La proposición $(\exists n)\ n$ es natural $\wedge n < 0$, es falsa, ya que todo natural es mayor o igual a 0.
- La proposición $(\exists x)\ x$ es real $\wedge x^2 < 0$, es falsa, ya que todo real cumple que su cuadrado es mayor o igual a 0.

1.1.4. Función proposicional y cuantificadores

Relación entre cuantificadores

Es muy importante saber como negar una proposición que utiliza cuantificadores, por ejemplo la negación de la proposición "todos los x de esta sala son mujeres" es "existe un x tal que no es mujer", esto define una relación entre ambos cuantificadores, y es la siguiente:

$$\sim [(\forall x)\ p(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\ (\sim p(x))$$

o bien

$$\sim [(\exists x)\ p(x)] \Leftrightarrow (\forall x)\ (\sim p(x))$$

Definición 1.12 (Cuantificador de Existencia y Unicidad)**.** Por último tenemos el cuantificador de **existencia y unicidad** que se escribe como $\exists! x\ p(x)$ y se lee como "existe un único x tal que $p(x)$. Formalmente, este cuantificador se puede definir a partir de los anteriores de la siguiente manera:

$$(\exists! x)\ p(x) \Leftrightarrow \underbrace{[(\exists x)\ p(x)]}_{\text{exisitencia}} \wedge \underbrace{[(\forall x)(\forall y)\ (p(x) \wedge p(y) \Rightarrow x = y)]}_{\text{unicidad}}$$

Lo más importante es que la proposición $\exists! x\ p(x)$ es verdadera solo si existe un único x que hace a $p(x)$ verdadero, si interpretamos la definición formal, notamos que para verificar que $\exists! x\ p(x)$ sea verdadera, debemos asegurar la existencia, es decir que exista algún x que haga $p(x)$ verdadero, y la unicidad, es decir, probar que cada vez que se satisface la propiedad para dos elementos, entonces necesariamente estos son iguales.

Ejemplo:

Como ejercicio podemos escribir la negación de $\exists! x\ p(x)$:

$$\sim \exists! x\ p(x) \Leftrightarrow [(\forall x)\ (\sim p(x))] \vee [(\exists x)(\exists y)\ (p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y)]$$

Ejemplo:

Otros ejemplos de negación:

- $\sim$ "Todas las personas de la sala son mujeres" $\Leftrightarrow$ "Existe una persona que no es mujer"
- "En la sala no hay ninguna mujer" $\Leftrightarrow$ "Cada individuo de la sala no es mujer"
- $\sim [(\forall x)\ (p(x) \Rightarrow q(x))] \Leftrightarrow (\exists x)\ [((\sim p(x)) \wedge q(x))]$
- $\sim [(\exists x)\ (p(x) \wedge q(x))] \Leftrightarrow (\forall x)\ [(\sim p(x)) \vee (\sim q(x))]$
- $\sim [(\forall x)(\exists y)(2x = y)] \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\ (2x \neq y)$

SECCIÓN 1.2

Teoría de Conjuntos

Definición 1.13 (Conjunto)**.** Entenderemos un **conjunto** como una agrupación de elementos[6]. Queremos que ocurra lo siguiente; "conozco un conjunto si sé cuales son y cuales no son sus elementos".

Definición 1.14 (Relación entre elementos y conjuntos)**.** Si x es un elemento y A es un conjunto, la proposición $x \in A$ ("x pertenece a A") significa que x es uno de los elementos dentro del conjunto A. Por otra parte su negación se denota como $x \notin A \Leftrightarrow \sim (x \in A)$ ("x no pertenece a A").

1.2.1. Conjuntos, inclusión y pertenencia

Los conjuntos se pueden escribir por:

- **Extensión**: Se escriben exactamente los elementos que pertenecen a el conjunto. Ejemplo; $\{1, 0\}$, $\{0, \frac{1}{2}, 200, 6, 3\}$
- **Comprensión**: Se define mediante una regla general para sus elementos. Ejemplo; $\{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1) = 0\}$, $\{2x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$

Observación 1.4. Si pensamos en el conjunto $0, 2, 4, 6, 8...$ ¿dónde cree que calzaría mejor esta forma de escribir un conjunto, extensión o comprensión?

Ejemplo:

Algunos conjuntos útiles:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ (Los naturales)
- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (Los enteros)
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ \text{con } n \neq 0\}$ (Los racionales)
- $\mathbb{R} = \{\text{números reales; Por ej: } \sqrt{2}, e, \pi, \text{ y todos los racionales.}\}$
- $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ (Los irracionales)
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, los que llamaremos **intervalos**:
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
  - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
  - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
  - $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $]\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
  - $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

- $]\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

Definición 1.15 (Igualdad de conjuntos)**.** Si A y B son conjuntos, ellos serán iguales ($A = B$) si y solo si:

$$(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

o equivalentemente

$$A = B \Leftrightarrow \text{ sus elementos son exactamente los mismos}$$

Observación 1.5. De la definición se desprende que en los conjuntos no es importante que una descripción por extensión se listen sus elementos con repeticiones, o se cambie el orden de ellos. Por ejemplo; $\{1, a, b, c, a, a\} = \{b, a, b, c, 1\}$.

Definición 1.16 (Conjunto vacío)**.** Se denota por ϕ al **conjunto vacío** y se define de modo que no tenga elementos, es decir que:

$$(\forall x)\ [x \notin \phi] \Leftrightarrow V$$

o equivalentemente

$$(\exists x)[x \in \phi] \Leftrightarrow F$$

Observación 1.6. La proposición $x \in \phi$ es siempre falsa.

Proposición 1.17. *El conjunto vació ϕ es único:*

Demostración. Recordemos del capítulo anterior que el esquema de demostración de unicidad es según $[(\forall x)(\forall y)\ (p(x) \wedge p(y) \Rightarrow x = y)]$.Donde en este caso $p(x)$ es "x es el conjunto vacío" Ahora supongamos que hay más de uno, digamos ϕ_1 y ϕ_2.
Como sabemos que $A = B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$, verificamos que:

$$(\forall x)\underbrace{[\underbrace{x \in \phi_1}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{x \in \phi_2}_{F}]}_{V}$$

$\Rightarrow \phi_1 = \phi_2$, en consecuencia el vacío es único. □

Definición 1.18 (Subconjunto)**.** Diremos que un conjunto A "contiene" a otro conjunto B, o que B es **subconjunto** de A ($B \subseteq A$) si todo elemento de B es obligatoriamente de A, es decir :

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)[x \in B \Rightarrow x \in A]$$

Observación 1.7. Notar que $A = B \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$, en efecto, de la definición:

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \text{ caracterización de la equivalencia (TB15)} \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B)] \wedge (\forall x)[(x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \end{aligned}$$

Proposición 1.19. *Para cualquier conjunto A, se tiene que:*

- $\phi \subseteq A$
- $A \subseteq A$

Demostración.

- $(\forall x)[\underbrace{\underbrace{x \in \phi}_{F} \Rightarrow x \in A}_{V}] \Leftrightarrow \phi \subseteq A.$
- $(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in A]$
  $x \in A \Rightarrow x \in A$ es una proposición de la forma $p \Rightarrow p \Leftrightarrow V$, luego $A \subseteq A$.

□

Ejemplo:

Ejemplos sobre inclusión y pertenencia:

- $2 \in \{1, 2, 4\}$
- $2 \notin \{1, \{2\}, 4\}$
- $2 \nsubseteq \{1, 2, 4\}$
- $\{2\} \subseteq \{1, 2, 4\}$
- $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 4\}$
- $\{2\} \notin \{1, 2, 4\}$
- $\{2\} \in \{1, 2, 4, \{2\}\}$
- $\{2\} \notin \{1, 2, 4, \{2, 3\}\}$
- $\{2\} \notin \{1, 2, 4, \{\{2\}, 2, 3\}\}$
- $\phi \in \{\phi\}$
- $\phi \notin \{\{\phi\}\}$

1.2.2. Operaciones entre conjuntos

Dados dos conjuntos A y B se definen los siguientes conjuntos:

Definición 1.20 (Unión de conjuntos)**.** El conjunto $A \cup B$ se llama "A **unión** B" y es tal que contiene tanto a los elementos del conjunto A como a los elementos del conjunto B, se define por:

$$(\forall x)[x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B]$$

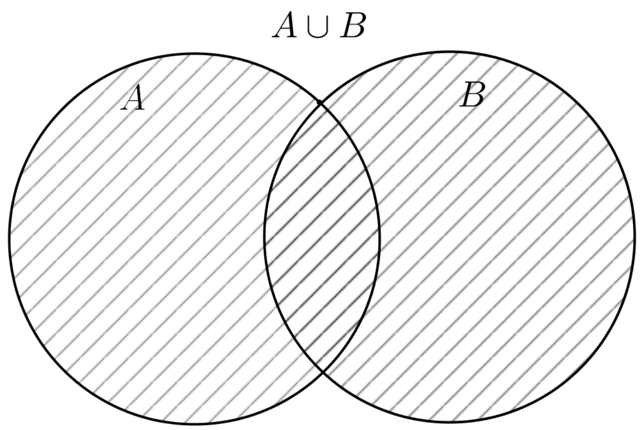


FIGURA 1.1. Diagrama de Venn; Unión de A con B.

Definición 1.21 (Intersección de conjuntos)**.** El conjunto $A \cap B$ se llama "A **intersección** B" y es tal que contiene solo a los elementos del conjunto A que también están en B, se define por:

$$(\forall x)[x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B]$$

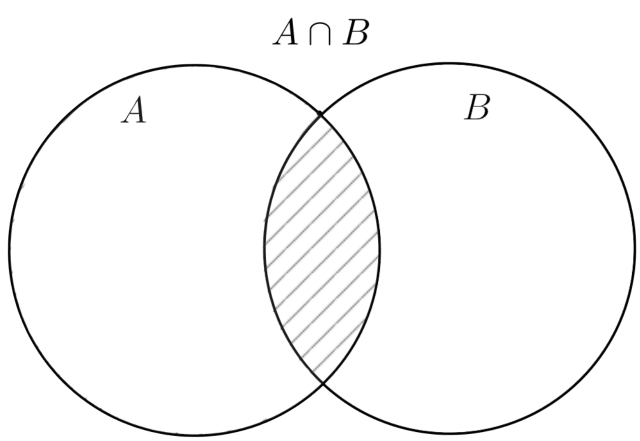


FIGURA 1.2. Diagrama de Venn; Intersección de A con B.

Definición 1.22 (Diferencia de conjuntos)**.** El conjunto $A \smallsetminus B$ se llama "A **menos** B" y es tal que contiene solo a los elementos del conjunto A que no están en B, se define como:

$$(\forall x)[x \in A \smallsetminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B]$$

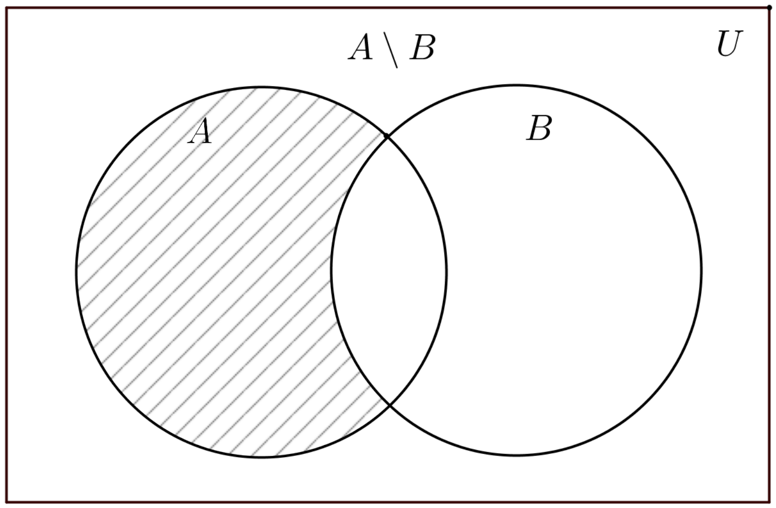


Figura 1.3. Diagrama de Venn; Conjunto A menos B.

Definición 1.23 (Conjunto Universo)**.** Se define un conjunto **universo**, que denotaremos como U, como aquel (elegido por nosotros) que contiene todos los elementos que nos interesan.

Observación 1.8. Dado un universo U, la proposición $x \in U$ es siempre verdadera

Definición 1.24 (Complemento de un conjunto)**.** Dado un universo U se define el **complemento** del conjunto A (A^c) como:

$$A^c = U \smallsetminus A$$

o equivalentemente

$$(\forall x)[x \in A^c \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A]$$

Observación 1.9. Notar que, como la proposición $x \in U$ es siempre verdadera, se tiene que

$$(\forall x)[x \in A^c \Leftrightarrow \underbrace{x \in U}_{V} \wedge x \notin A] \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A]$$

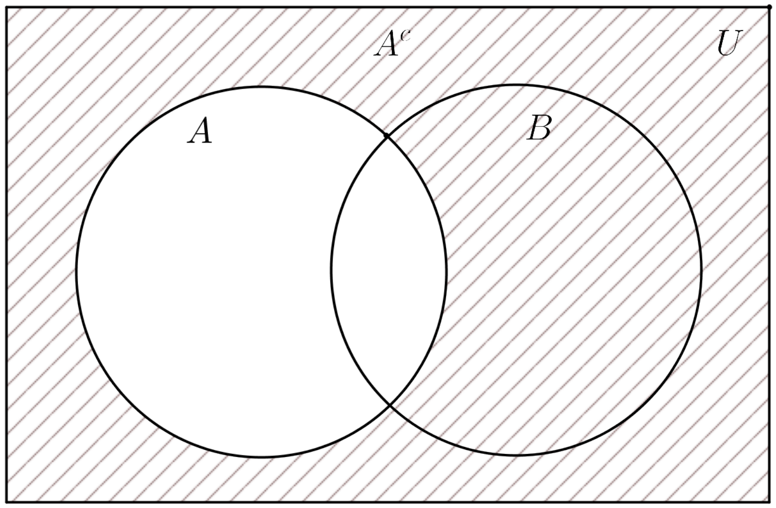


FIGURA 1.4. Diagrama de Venn; Complemento de A.

Definición 1.25 (Diferencia simétrica)**.** El conjunto $A\Delta B$ se llama " **diferencia simétrica** entre A y B", y contiene a los elementos en A y en B, pero que no están en ambos a la vez, se define como:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

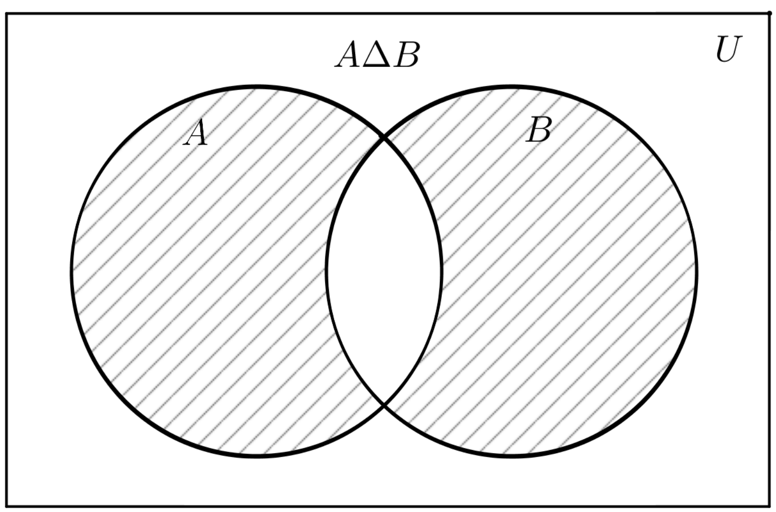


FIGURA 1.5. Diagrama de Venn; Diferencia simétrica entre A y B.

Observación 1.10. Notar que $A \setminus B = A \cap B^c$, en efecto, de la definición, sea x cualquiera:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B^c \end{aligned}$$

$$\therefore A \setminus B = A \cap B^c$$

Ejemplo:

Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ el universo, y $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,7\}$, $C = \{4,6,8\} \subseteq U$, entonces se tiene que:

- $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $A \cap B = \{2,7\}$
- $B \cup C = \{2,4,5,7,6,8\}$
- $A \cap C = \phi$
- $A^c = \{1,4,6,8,9\}$
- $A \setminus B = \{3,5\}$
- $A \Delta B = \{3,5,4,6\}$

Proposición 1.26. *Sean A, B, C conjuntos (en un universo U), entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Idempotencia:*
   - $A \cap A = A$
   - $A \cup A = A$
2. - $A \cup \phi = A$
   - $A \cap \phi = \phi$
3. - $A \cup U = U$
   - $A \cap U = A$
4. - $A \cup A^c = U$
   - $A \cap A^c = \phi$
5. *Conmutatividad:*
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cap B = B \cap A$
6. *Asociatividad:*
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$
7. *Dsitributividad:*
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. *De Morgan:*
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
9. $(A^c)^c = A$
10. - $A \cap B \subseteq A$
    - $A \subseteq A \cup B$
11. *Reflexividad:*

   - $A \subseteq A$
   - $A = A$

12. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
13. $A \setminus B = A \cap B^c$
14. *Propiedades de la diferencia simétrica:*
    - $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
    - $A\Delta B = B\Delta A$
    - $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
    - $A\Delta A = \phi$
    - $A\Delta\phi = A$
    - $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

Demostración. La demostración de cada una de estas propiedades se desprenden directamente de las tautologías básicas, haremos la 12. como ejemplo.

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \notin B \Rightarrow x \notin A] \text{ contrarrecíproca (TB14)} \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \in B^c \Rightarrow x \in A^c] \\ &\Leftrightarrow B^c \subseteq A^c \end{aligned}$$

□

Observación 1.11. Notar que todas estas propiedades pueden ser utilizadas directamente para demostrar una propiedad particular[7].

Ejemplo:

Demostrar que $A\Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} A\Delta B & = & (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ PC13 & = & (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ PC7 & = & [A \cup (B \cap A^c)] \cap [B^c \cup (B \cap A^c)] \\ PC7 & = & [(A \cup B) \cap (A \cup A^c)] \cap [(B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c)] \\ PC4 & = & [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (B^c \cup A^c)] \\ PC3 & = & (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\ PC8 & = & (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ PC13 & = & (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{array}$$

□

Definición 1.27 (Conjunto Potencia)**.** Dado un conjunto A, llamamos **conjunto potencia** de A, que denotamos por $\mathcal{P}(A)$, esto es al conjunto de todos los subconjuntos de A, se define como:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

[7] Cada vez que se usen y sea necesario recalcarlo se llamarán como PCn , donde n es el número asignado a la propiedad de conjuntos en este apunte.

o equivalentemente

$$(\forall X)[X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A]$$

Observación 1.12. Note que $\phi \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$

Ejemplo:

Sea $A = \{0, 1\}$, y $B = P\{a, b, c\}$ entonces:

- $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
- $\mathcal{P}(B) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

Ejemplo:

Demostrar que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $X \subseteq A \vee X \subseteq B$, entonces se tiene que $X \subseteq A \cup B$ (¡ justifique !), esto es equivalente a decir:

$$X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

Con lo que se demuestra que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
¿ Será cierto que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?. □

1.2.3. Cuantificando sobre conjuntos

Dado un conjunto A y una proposición $p(x)$, cuando nos interese saber qué pasa con la proposición sólo con elementos de A, es posible reflejarlo mediante las siguientes proposiciones:

- La proposición "Todos los x que están en A satisfacen $p(x)$ " la escribimos como:
$$(\forall x \in A)p(x)$$
- La proposición "Existe al menos un x que está en A y satisface $p(x)$ " la escribimos como:
$$(\exists x \in A)p(x)$$

Observación 1.13. Notar que podemos hacer definiciones formales usando lo previo de la siguiente manera:

$$(\forall x \in A)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow (p(x))]$$

$$(\exists x \in A)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)[x \in A \wedge (p(x))]$$

Como conclusión, la negación de estas proposiciones será:

- $$\begin{aligned} \sim [(\forall x \in A)p(x)] &\Leftrightarrow \sim [(\forall x)[x \in A \Rightarrow (p(x))]] \\ &\Leftrightarrow (\exists x)[x \in A \wedge (\sim p(x))] \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\sim p(x)) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \sim [(\exists x \in A)p(x)] &\Leftrightarrow \sim [(\exists x)[x \in A \wedge (p(x))]] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \notin A \vee (\sim p(x))] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow (\sim p(x))] \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\sim p(x)) \end{aligned}$$

Definición 1.28 (Pares ordenados)**.** Si $a \in A$ y $b \in B$, el **par ordenado** (a, b) es una agrupación de estos elementos, en la que se distingue a a como el primer elemento y a b como el segundo elemento.

De acuerdo a esto, diremos que dos pares ordenados (a, b) y (x, y) son iguales si y solo si son iguales componente a componente, es decir:

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \wedge b = y$$

Definición 1.29 (Producto Cartesiano)**.** Dados dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** entre A y B, que denotamos como $A \times B$ ("A cruz B") se define como:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Así

$$z \in A \times B \Leftrightarrow (\exists a \in A)(\exists b \in B) \text{ tal que } z = (a, b)$$

1.2.4. Producto de conjuntos

Observación 1.14. Notar que, si A y B son un conjuntos, entonces:

- $A \times \phi = \phi$
- $\phi \times A = \phi$
- $A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$

Ejemplo:

Si consideramos $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

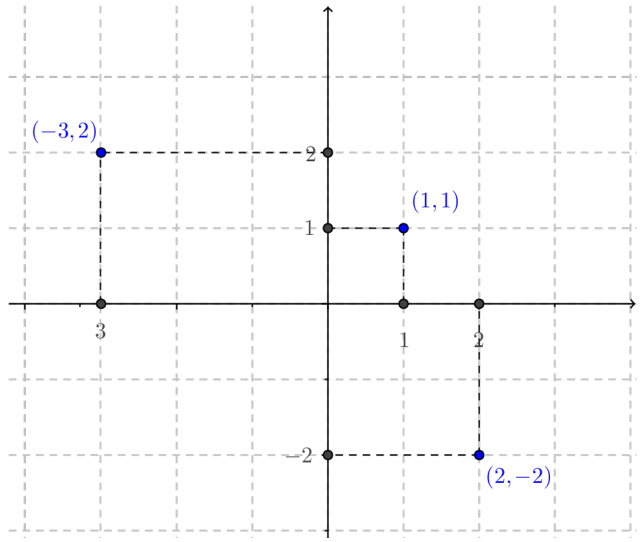


FIGURA 1.6. Representación usual en el plano cartesiano.

Ejemplo:

Demostrar que $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

DEMOSTRACIÓN. Sea (x, y) un par ordenado cualquiera.

$$\begin{array}{rcl}
(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \wedge y \in (C \cap D) \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\
& \Leftrightarrow & ((x,y) \in A \times C) \wedge ((x,y) \in B \times D) \\
& \Leftrightarrow & ((x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)
\end{array}$$

Es decir $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$. □

CAPÍTULO 2

Geometría analítica

SECCIÓN 2.1

Vectores en el plano y el espacio

2.1.1. Números reales ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ...$) Cuando hablemos de $\mathbb{R}^2$, nos vamos a referir al conjunto de todos los pares ordenados que cumplan:

$$\{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

. Es decir, el producto cruz de $\mathbb{R}x\mathbb{R}$. Y así podemos definir $\mathbb{R}^3$ como el conjunto de las ternas:

$$\{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

.

Para dar cuenta de las nociones del espacio plano, como son por ejemplo distancias, lugares, figuras e incluso movimiento, necesitaremos un **s**istema de referencia o **s**istema de coordenadas cartesianas. Cada punto A tiene asociadas dos coordenadas $A = (x, y)$. El trazo dirigido del origen al punto A o **v**ector posición lo denotamos por

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

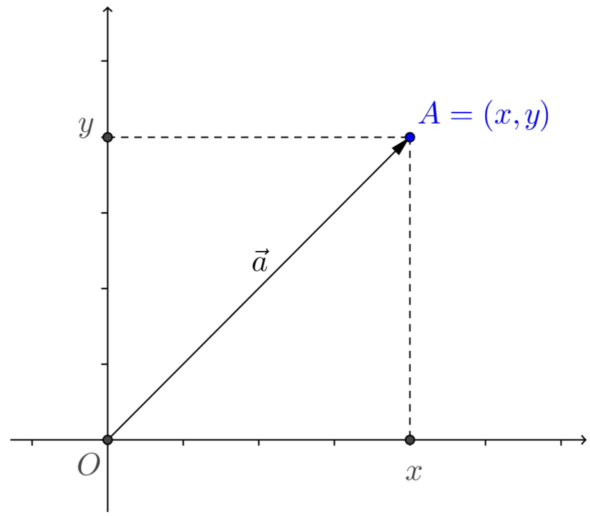


FIGURA 2.1. Sistema de coordenadas y vector posición.

Definición 2.1 (Vector desplazamiento e igualdad de vectores)**.** Así como un vector puede indicar **p**osición respecto de un origen dado, por ejemplo, el vector posición que apunta en cada momento del Sol a la Tierra, un vector también es útil para indicar **d**esplazamientos. Sean A y B dos puntos cualesquiera del plano, entonces el trazo dirigido con origen en A y término en B se llama **vector desplazamiento** o **v**ector libre $\overrightarrow{AB}$.

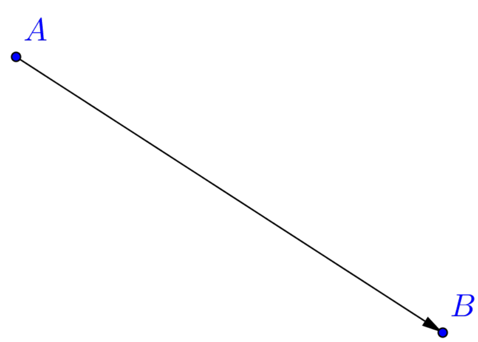


FIGURA 2.2. Vector desplazamiento.

Definición 2.2 (Módulo de un vector)**.** El **módulo del vector** desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ es por definición la longitud del segmento AB.

Definición 2.3 (Dirección de un vector)**.** Si $A \neq B$, la dirección de un vector desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ hace referencia a la dirección de recta que contiene al segmento AB.

Definición 2.4 (Sentido de un vector)**.** Si $A \neq B$, el **sentido de un vector** desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ es uno de los dos posibles en la dirección dada

2.1.2. Igualdad de Vectores Para entender cabalmente la noción de igualdad de vectores, utilicemos un **paralelógramo**, que es por definición un cuadrilátero de lados opuestos paralelos. Consideremos por ejemplo el paralelogramo $ABCD$ de la figura. Por geometría elemental y congruencia de triángulos, se puede probar que los lados opuestos del paralelogramo son además de igual longitud.

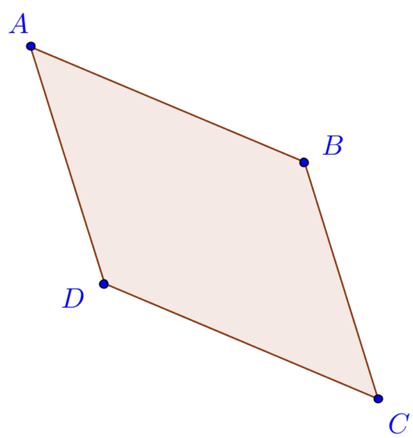


FIGURA 2.3. Paralelogramo.

Definición 2.5 (Igualdad geométrica de vectores)**.** Es fácil ver entonces que los vectores desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen igual **longitud, dirección y sentido**. Aunque no tienen el mismo origen diremos que ambos vectores son el mismo vector, pero con el origen desplazado. A esto se le llama **igualdad geométrica** de vectores.

Definición 2.6 (Igualdad algebraica de vectores)**.** De manera equivalente, podemos considerar dos vectores desplazamiento iguales si coinciden cuando los trasladamos al origen. Esto es, una vez trasladados al origen, es claro que dos vectores serán iguales si el punto al que apuntan es el mismo, esto es si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores posición de $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ respectivamente, entonces, por igualdad de pares ordenados, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2, \ y_1 = y_2$$

A esto se le llama **igualdad algebraica** de vectores.

Definición 2.7 (Suma de vectores)**.** Si nos desplazamos de A a B y luego de B a C, es natural pensar que el desplazamiento total es el vector que va de A a C. Esto es

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

En el paralelógramo $ABCD$ de antes, esto se ve así:

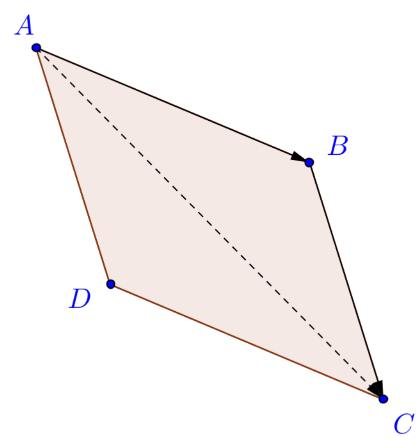


Figura 2.4. Suma geométrica de vectores.

donde el vector suma resulta seguir una de las diagonales del paralelogramo.

Observación 2.1. Otra forma de verlo es así, donde luego de desplazar paralelamente $\overrightarrow{BC}$ hasta $\overrightarrow{AD}$, ahora miramos los dos vectores desde un mismo origen común A. En este caso la suma sigue siendo la misma, y correspondería por ejemplo a la fuerza resultante de arrastrar un peso en dos direcciones diferentes.

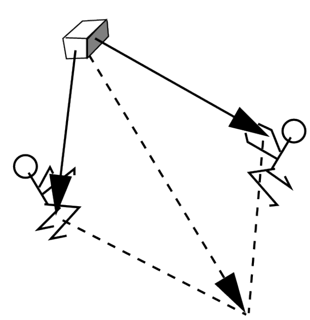


Figura 2.5. Resultante de fuerzas que arrastran un peso.

Es fácil ver de la siguiente figura que se cumple para los vectores por el origen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

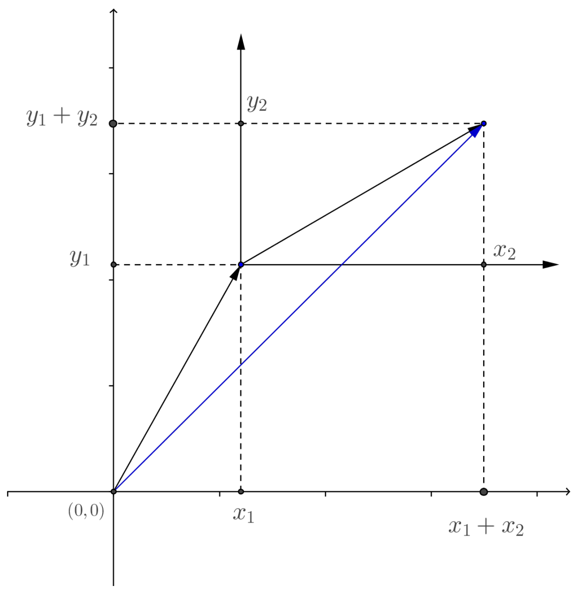


FIGURA 2.6. Suma analítica.

Es fácil verificar que la suma de vectores es conmutativa y asociativa.

Definición 2.8 (Ponderación de vectores)**.** Siguiendo con la idea de fuerzas, si duplicamos la magnitud de una fuerza, o la reducimos a la mitad, solamente estamos cambiando la longitud del vector fuerza por un factor, sin variar su dirección ni su sentido. A este factor lo llamaremos **ponderador** o **escalar** y lo denotaremos preferentemente por una letra griega para diferenciarlo de los vectores. Lo que decimos corresponde a ponderadores positivos $\alpha = 2$, $\alpha = 1/2$.

Geométricamente, esto se muestra en la figura siguiente:

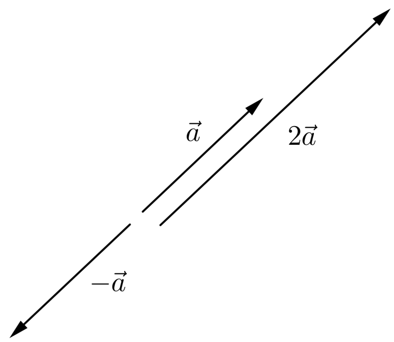


FIGURA 2.7. Ponderación de un vector.

Podemos también cambiar el sentido de la fuerza, sin variar su dirección, esto corresponde a ponderadores negativos $\alpha < 0$.

En ambos casos, analíticamente lo que hacemos es:

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

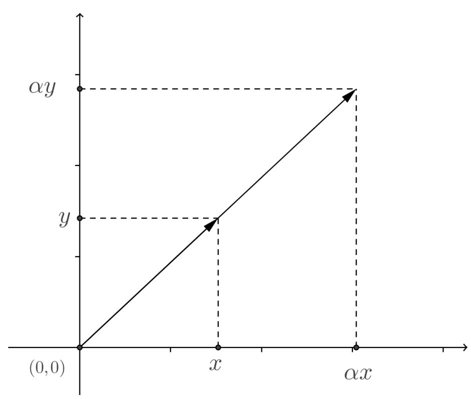


FIGURA 2.8. Ponderación de un vector. A cada coordenada se le aplica un factor α.

Esto incluye el caso particular en que $\alpha = 0$, en cuyo caso se obtiene el **v**ector nulo:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el caso $\alpha = 1$ que deja invariante al vector:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y para el caso $\alpha = -1$ se obtiene lo que se conoce como el **v**ector opuesto

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Observación 2.2. Notar que un vector y su opuesto dan como resultante el vector nulo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o en notación más condensada

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

y que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o en notación más condensada

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Ejemplo:

Puede el lector verificar también en forma analítica la asociatividad siguiente:

$$(\alpha)\beta\vec{a} = (\alpha\beta)\vec{a}$$

y la distributividad tanto para vectores como para escalares:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$
$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

Definición 2.9 (Vectores paralelos)**.** Dos vectores se dicen paralelos si tienen igual dirección. De forma equivalente, dos vectores son paralelos si uno es ponderación del otro, con un ponderador no nulo, esto es:

$$\vec{a} \| \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } \alpha \neq 0 \text{ tal que } \vec{a} = \alpha\vec{b}$$

Llevándolo a forma analítica esto es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } \alpha \neq 0 \text{ tal que } x_1 = \alpha x_2,\ y_1 = \alpha y_2$$

eliminando α se obtiene la condición de paralelismo[1] siguiente[2]:

$$x_1\, y_2 - x_2\, y_1 = 0.$$

[1]Más adelante se leerá esta expresión como “determinante nulo”.

[2]Más adelante veremos que esto equivale a la condición de que las pendientes de ambos vectores son iguales: $y_1/x_1 = y_2/x_2$.

Definición 2.10 (Tres puntos colineales)**.** Tres puntos A, B, C se dicen colineales si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos. Notar que los dos vectores comparten un punto común.

Definición 2.11 (Resta de vectores)**.** Consideremos el triángulo siguiente formado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Es claro que si operáramos con vectores tal como se hace para los números reales se tendría:

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$

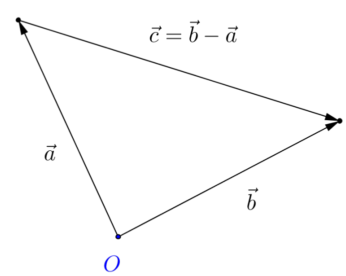


Figura 2.9. Resta de vectores.

A través de la resta de vectores, veamos ahora la utilidad de ver los vectores de forma algebraica. Utilizando las propiedades vistas hasta ahora[3], el despeje de $\vec{c}$ se hace paso por paso así:

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{c} &= \vec{b} \\
\vec{c} + \vec{a} &= \vec{b} && \text{/(usando conmutatividad...)} \\
(\vec{c} + \vec{a}) + (-\vec{a}) &= \vec{b} + (-\vec{a}) && \text{/(sumando opuesto a ambos lados...)} \\
\vec{c} + (\vec{a} + (-\vec{a})) &= \vec{b} + (-\vec{a}) && \text{/(por asociatividad...)} \\
\vec{c} + \vec{0} &= \vec{b} + (-\vec{a}) && \text{/(por opuesto...)} \\
\vec{c} &= \vec{b} + (-\vec{a}) && \text{/(por neutro...)}
\end{aligned}$$

de donde es natural definir la resta como la suma del opuesto, al igual que para los números reales:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$$

esto es, analíticamente, la resta de vectores queda:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

[3]Propiedades llamadas de Espacio Vectorial

Ejemplo:

Verifique geométricamente que la resta en un paralelogramo corresponde a otra de sus diagonales.

Notar que con la definición de resta se tiene automáticamente que

$$\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b}, \qquad (\alpha - \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{a}$$

Definición 2.12 (Punto medio y razón)**.**

El vector posición $\vec{m}$ correspondiente al **punto medio** M entre los puntos A y B, cuyos vectores posición son respectivamente $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

calculando (y omitiendo paréntesis cada vez que se pueda por asociatividad) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \\
&= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \qquad \text{/(por distributividad...)} \\
&= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \qquad \text{/(por conmutatividad...)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \qquad \text{/(por distributividad...)} \\
&= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \qquad \text{/(restando...)} \\
&= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}
\end{aligned}$$

Observación 2.3. Analíticamente, si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, entonces

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$

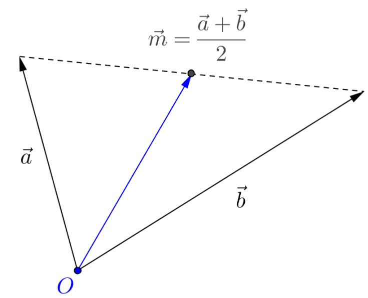


Figura 2.10. Punto medio.

De forma similar se puede obtener el punto el **vector posición** $\vec{r}$ del punto R que separa el segmento AB en la razón m es a n como

$$\vec{r} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$$

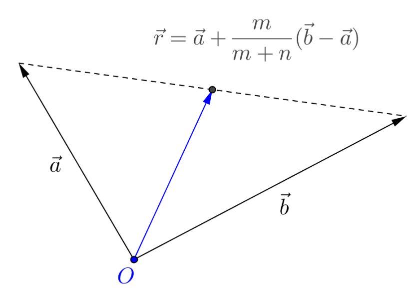


Figura 2.11. Razón $m : n$.

Teorema 2.13 (Teorema de Pitágoras)**.** *Establece que en un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b se tiene que:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Demostración de Euclides. Esta demostración se basa en descomponer el área del cuadrado de la hipotenusa c^2, en la suma de dos rectángulos de largo c y anchos p y q respectivamente.

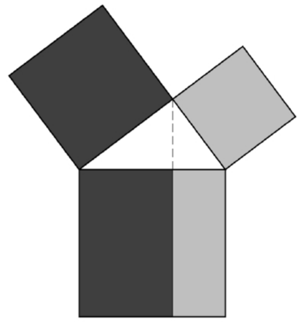


FIGURA 2.12. Demostración de Euclides.

Consiste en probar que todos los triángulos sombreados tienen la misma 'area.

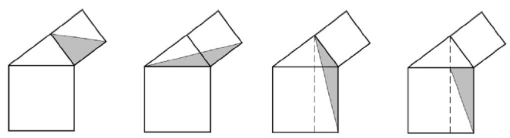


FIGURA 2.13. Demostración de Euclides.

□

Observación 2.4 (Cálculo del módulo de un vector)**.** En base al teorema de Pitágoras, podemos calcular el **módulo de un vector** $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de la siguiente forma:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2},$$

considerando la raíz positiva.

Definición 2.14 (Vector unitario)**.** Un **vector unitario** es un vector de módulo 1:

$$\vec{a} \text{ es unitario} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\vec{a}| = 1$$

y se denota por $\hat{a}$.

Definición 2.15 (Producto punto de vectores)**.** Se define el siguiente producto entre dos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1\, y_2 + y_1\, y_2$$

Observación 2.5. Notar que el producto punto no es un vector, sino que un número real que puede se negativo, positivo o nulo.

Ejemplo:

[Propuesto] Verificar las siguientes propiedades:

- $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$
- $$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}$$

Observación 2.6. Notamos también que el módulo de un vector $\vec{a}$ se puede calcular como $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

Definición 2.16 (Vectores perpendiculares)**.** Dos vectores se dicen perpendiculares si su producto punto es nulo, esto es

$$\vec{a}\perp\vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Observación 2.7. La condición de perpendicularidad es la siguiente [4]

$$x_1\,x_2 + y_1\,y_2 = 0$$

Ejemplo:

[Propuesto] **Problemas de triángulos definidos en forma vectorial**

Dos problemas clásicos son:

1. Demostrar que un triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.
   Desde el centro de la circunferencia, llamar a un radio $\vec{a}$ y al otro radio opuesto $-\vec{a}$. Al vector que va del centro al vértice opuesto C del triángulo llamarlo $\vec{c}$. Entonces verificar que:
   $$(-\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = 0$$
   usando que el radio es igual, esto es que $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{c}$.
2. Demostrar que las transversales de gravedad se intersectan en la razón 1:2.
   Hacerlo por ejemplo en el triángulo de la figura definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hay que mostrar que
   $$\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})-\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$$

[4] Más adelante veremos que esto equivale a la condición "producto de pendientes igual -1" ya que corresponde a $\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -1$.

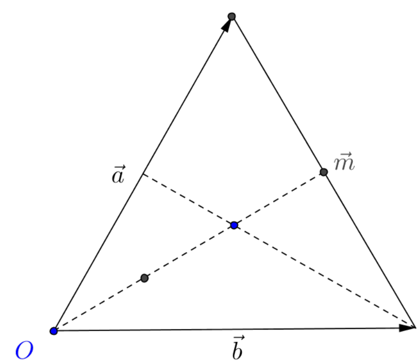


FIGURA 2.14. Transversales de Gravedad.

SECCIÓN 2.2

Escuela de Verano para estudiantes de Enseñanza Media Universidad de Chile

Geometría Analítica

2.2.1. Rectas

Definición 2.17 (Ecuación vectorial de una recta)**.** Una recta se puede definir mediante un **vector posición** y un **vector director** como se muestra en la siguiente ecuación y figura:

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p} + \alpha \vec{d}$$

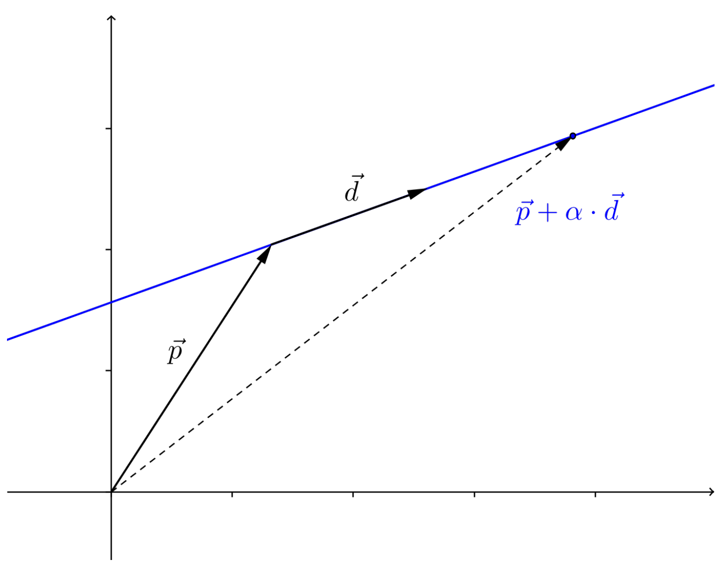


FIGURA 2.15. Vectores posición y director de la recta.

Definición 2.18 (Vector Normal a la recta)**.** Se define **vector normal** como aquél vector que es perpendicular a la recta, vale decir, perpendicular a su **vector director**.

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}$$

Observación 2.8. Dado un director, hay dos sentidos posibles para la normal.

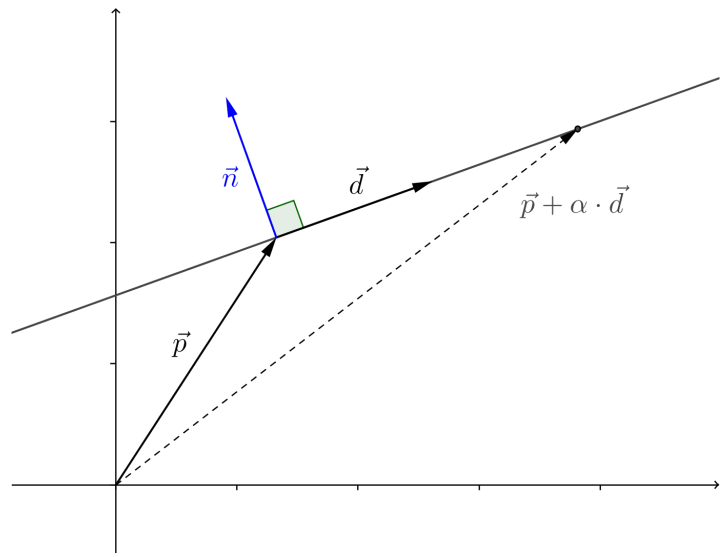


FIGURA 2.16. Vectores director y normal.

Ejemplo:

Para motivar, tomemos de nuevo el ejemplo de las transversales de gravedad de un triángulo como el de la Figura **1.14** y demostremos de un modo más convincente que se cortan en la razón $1:2$. Usaremos el concepto de **recta en forma vectorial**. La idea es encontrar el punto de intersección G de las rectas que contienen las transversales, llamado **centro de gravedad del triángulo** y de paso probar la propiedad pedida. Para ello, debemos primero describir las tres rectas en forma vectorial:

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(\vec{a}+\vec{b})$$

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\vec{a}}{2} + \beta\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)$$

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\vec{b}}{2} + \gamma\left(\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right)$$

Cada punto (x,y) de las rectas se obtiene de sumarle a un vector fijo o **vector posición** un **vector director** ponderado por un cierto escalar. Para la recta L_1 el vector posición es nulo, de modo que solamente se pondera su director.

El punto de intersección G se obtiene para ciertos valores de α, β y γ. Para que la propiedad de la razón $1:2$ sea válida, ellos deberían ser, respectivamente:

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Para obtener estos valores, igualemos las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2:

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{\vec{a}}{2} + \beta\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)$$

entonces

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} = \vec{0}.$$

En la expresión anterior, ambos factores deben ser nulos, de lo contrario los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ serían paralelos y no formarían un triángulo[5]. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo este simple sistema lineal se obtienen los valores

$$\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \beta = \frac{1}{3}.$$

De manera análoga se obtiene $\gamma = \frac{1}{3}$, al igualar las ecuaciones de las rectas L_1 y L_3.

Definición 2.19 (Ecuación paramétrica de una recta)**.** Se obtiene igualando componentes en la forma vectorial.

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \alpha d_1 \\ y &= p_2 + \alpha d_2 \end{aligned}$$

Definición 2.20 (Ecuación analítica de una recta)**.** Se obtiene eliminando el parámetro α de la forma anterior. Definiendo las constantes

$$A = d_2, \qquad B = -d_1, \qquad C = d_1\, p_2 - d_2\, p_1$$

se obtiene:

$$Ax + By + C = 0$$

llamada **forma general de la recta**.

Observación 2.9.

$$\begin{aligned} \text{Rectas horizontales:} &\quad A = 0 \\ \text{Rectas verticales:} &\quad B = 0 \end{aligned}$$

Definición 2.21 (Pendiente: La forma estándar)**.** Se puede obtener de la forma general solamente si la recta no es vertical ($B \neq 0$)

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

con

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{d_2}{d_1}$$

queda

$$y = mx + n$$

que es la ecuación de una recta conociendo la pendiente m y la intersección con el eje y (coeficiente de posición n).

Observación 2.10. Si la recta pasa por un punto (x_1, y_1) se tiene

$$y_1 = mx_1 + n$$

y restando se obtiene

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ecuación de una recta conocido un punto y la pendiente. Si la recta pasa por un segundo punto (x_2, y_2) se obtiene

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

de donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

da la pendiente entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), siempre que la recta no sea vertical ($x_1 \neq x_2$).

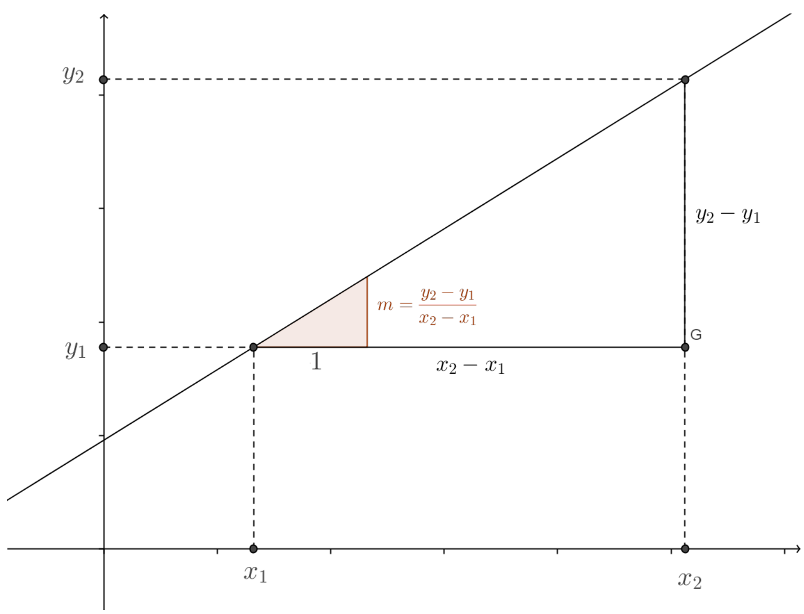


FIGURA 2.17. Pendiente de la recta.

Definición 2.22 (Ecuación normal de una recta)**.** Consideremos la forma general:

$$Ax + By = -C$$

Si además se sabe que la recta pasa por el punto (x_0, y_0) queda

$$Ax_0 + By_0 = -C$$

restando

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

La normal está dada por

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

de donde

$$(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

llamada **forma normal de la recta**, donde $\vec{p} = \binom{x_0}{y_0}$ es un vector posición de la recta y $\vec{r} = \binom{x}{y}$ un punto de la recta.

Observación 2.11 (Paso de una forma a otra.)**.** Para el camino:

$$\text{Forma vectorial} \quad \to \quad \text{Forma paramétrica} \quad \to \quad \text{Forma analítica}$$

se hace como antes, igualando componentes y luego eliminando el parámetro.

Para el camino inverso:

$$\text{Forma analítica} \quad \to \quad \text{Forma vectorial}$$

lo mejor es obtener dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) de la forma analítica y con ellos obtener posición y dirección (resta):

$$\vec{p} = (x_0, y_0), \qquad \vec{d} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

Definición 2.23 (Rectas paralelas y perpendiculares)**.** Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos. Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

Si L_1 tiene director $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$ y L_2 tiene director $\vec{e} = \binom{e_1}{e_2}$ entonces

$$\begin{aligned} L_1 \| L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad d_1\, e_2 - d_2\, e_1 = 0 \qquad \left(\begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} = 0 \right) \\ L_1 \perp L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad d_1\, e_1 + d_2\, e_2 = 0 \qquad \left(\vec{d} \cdot \vec{e} = 0 \right) \end{aligned}$$

Observación 2.12. De manera equivalente, dos rectas son paralelas (resp. perpendiculares) si sus vectores normales son paralelos (resp. perpendiculares).

Observación 2.13. La condición de paralelismo es equivalente a la igualdad de pendientes (salvo en el caso de rectas verticales). En efecto

$$\begin{aligned} L_1 \| L_2 &\Leftrightarrow d_1\, e_2 - d_2\, e_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow d_2\, e_1 = d_1\, e_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{e_2}{e_1} \\ &\Leftrightarrow m_1 = m_2 \end{aligned}$$

Y la condición de perpendicularidad es equivalente a la célebre regla de producto de pendientes -1 (excepto para pares de rectas horizontales/verticales). Esto es porque:

$$\begin{aligned} L_1 \perp L_2 &\Leftrightarrow d_1\, e_1 + d_2\, e_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow d_2\, e_2 = -d_1\, e_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1}\frac{e_2}{e_1} = -1 \\ &\Leftrightarrow m_1\, m_2 = -1 \end{aligned}$$

Observación 2.14 (Sistemas de dos rectas)**.** Hay tres casos:

1. Existe una infinidad de soluciones, el sistema es consistente y las rectas se intersectan en todos sus puntos pues son coincidentes. Ejemplo:
$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 2x + 4y &= -2 \end{aligned}$$
2. No existe solución, el sistema es inconsistente y las rectas no se intersectan pues son paralelas pero no coincidentes. Ejemplo:
$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 2x + 4y &= -3 \end{aligned}$$
3. Existe una única solución, el sistema es consistente y las rectas (secantes) se intersectan en un único punto (x, y). Ejemplo:
$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ -2x + y &= -1 \qquad \to \qquad (x, y) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

2.2.2. Traslación del sistema de coordenadas.

Definición 2.24 (Traslación del sistema de coordenadas)**.** Si trasladamos el sistema Oxy a un sistema $O'x'y'$ donde el nuevo origen tiene coordenadas

$$O' = (x_0, y_0)$$

entonces las coordenadas en los dos sistemas se relacionan por

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned}$$

esto se ve fácilmente con vectores, si se considera que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

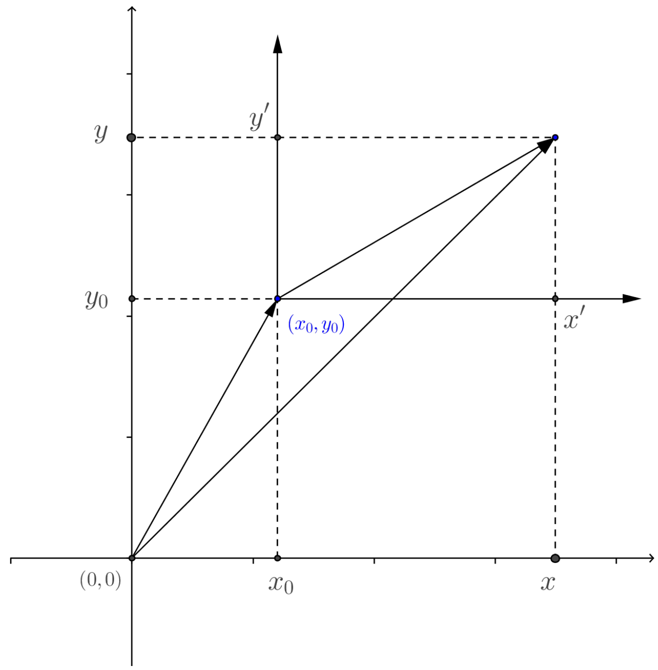


FIGURA 2.18. Coordenadas en el sistema trasladado.

Ejemplo:

$\mathcal{L} : y = mx$ es una recta de pendiente m que pasa por el origen y $\mathcal{L}' : (y - y_0) = m(x - x_0)$ es una recta de la misma pendiente que pasa por el punto (x_0, y_0), es decir esta recta pasa por el origen un sistema trasladado al punto (x_0, y_0).

2.2.3. Raíz Cuadrada

Definición 2.25 (Raíz cuadrada)**.** Se le llama **raíz cuadrada de** y al número positivo que es solución de la ecuación $x^2 = y$ y se denota por $x = \sqrt{y}$.

Observación 2.15. Dado un real $y \geq 0$, el conjunto solución de la ecuación $x^2 = y$ es $\{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}$.

Definición 2.26 (Distancia entre dos puntos)**.** Dados los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, su distancia se obtiene usando el **Teorema de Pitágoras** y la definición de raíz cuadrada (positiva). Se obtiene lo que ya habíamos aprendido para calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Definición 2.27 (Distancia de un punto a una recta)**.** Consideremos una recta

$$L: \ Ax + By = -C$$

y un punto

$$P = (x_0, y_0).$$

La recta perpendicular a L y que pasa por P está dada por:

$$L': \ -Bx + Ay = -Bx_0 + Ay_0.$$

Intersectando L con L' se obtiene el punto

$$P' = \left(\frac{B^2 x_0 - ABy_0 - CA}{A^2 + B^2}, \frac{A^2 y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} \right)$$

y calculando el módulo de $\overrightarrow{PP'}$ después de algo de álgebra se obtiene la distancia del punto P a la recta L:

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

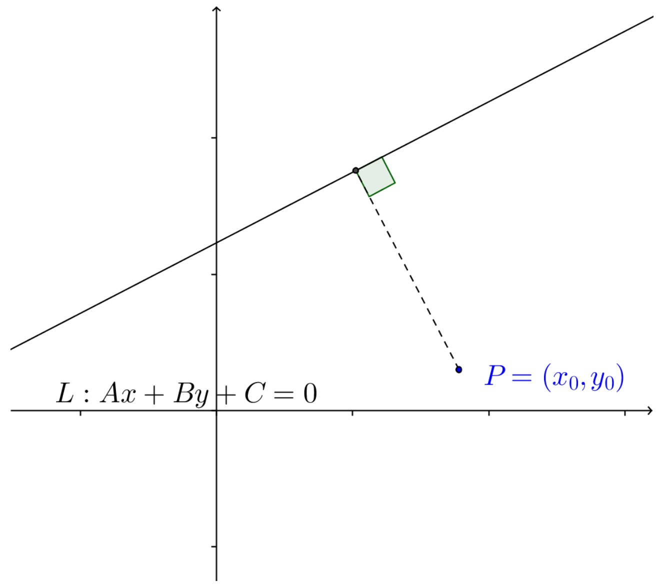


FIGURA 2.19. Cálculo de la distancia de un punto $P = (x_0, y_0)$ a una recta L.

2.2.4. Parábolas

Definición 2.28 (Parábolas)**.** Dado una posición p un foco $F = (0, p)$ y una directriz $D : y = -p$, los puntos $P = (x, y)$ equidistantes de F y D conforman una **parábola**:

$$d(P, F) = d(P, D)$$

esto es

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \text{Parábola} \quad &\Leftrightarrow \quad PF = PD \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|; \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4py \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4p}x^2. \end{aligned}$$

Gráfico de la parábola

Consideremos el caso $p > 0$. Entonces podemos apreciar lo siguiente:

(I) El punto $(0, 0)$ evidentemente satisface la ecuación de la parábola, luego la parábola pasa por el origen, como ya lo habíamos observado anteriormente.

(II) Como $x^2 \geq 0$ y $p > 0$ entonces, todos los puntos de la parábola deben tener ordenada no negativa $(y \geq 0)$, es decir, el gráfico de la parábola debe estar contenido en el primer y segundo cuadrante, además del origen.

(III) Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, como $(-x)^2 = x^2$, se concluye que el punto $P' = (-x, y)$ también satisface la ecuación de la parábola, o sea, pertenece a ella. Notemos que P' es el punto simétrico de P con respecto al eje OY.

En consecuencia, la parábola es una curva simétrica con respecto al eje OY.

La intersección entre la parábola y el eje de simetría se llama vértice de la parábola. En este caso el vértice es el origen $(0, 0)$.

(IV) En el primer cuadrante podemos calcular los valores de y obtenidos para diferentes valores de x. Si se consideran valores cada vez mayores de x, se obtienen valores cada vez mayores de y, por lo tanto la parábola es una curva creciente en este cuadrante.

Por todo lo anterior el gráfico será:

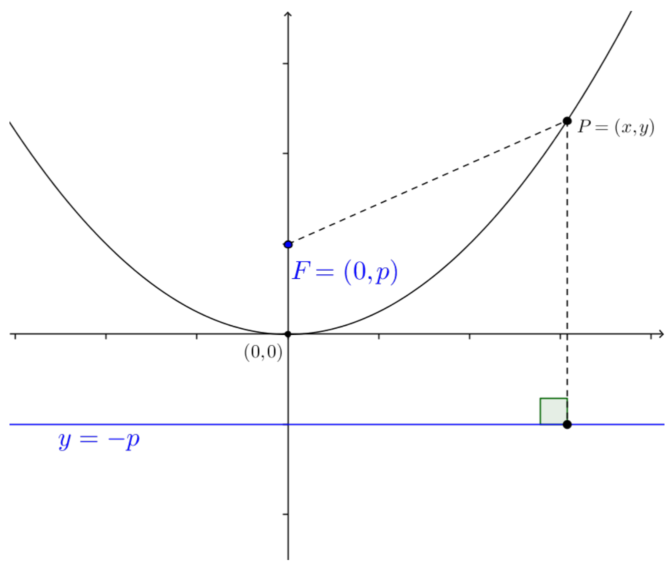


FIGURA 2.20. Parábola: La distancia de P al foco y a la directriz es la misma.

Observación 2.16. Si cambiamos el vértice de la parábola al nuevo origen O', la ecuación de la parábola queda:

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$$

donde el vértice es ahora

$$V = (x_0, y_0).$$

Ecuación general de la parábola

Teorema 2.29. *La ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ representa una parábola de eje vertical con directriz $D : y = \frac{-1-\triangle}{4a}$, foco $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{1-\triangle}{4a})$ y vértice $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a})$, donde $\triangle = b^2 - 4ac$ y se le llama discriminante.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ puede ordenarse completando cuadrados perfectos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c \quad &\Leftrightarrow \quad y = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] \\ &\Leftrightarrow \quad y = a[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}] \\ &\Leftrightarrow \quad y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] \\ &\Leftrightarrow \quad y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &\Leftrightarrow \quad (y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (y - y_0) = a(x - x_0)^2, \ \text{ donde } x_0 = -\frac{b}{2a}, \ y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Es decir, se trata de una parábola de eje vertical, con vértice desplazado a la posición (x_0, y_0). Como ya vimos anteriormente,$p = \frac{1}{4a}$ y por lo tanto el foco será

$$\begin{aligned} F &= (x_0, y_0 + p) \\ &= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a} + \frac{1}{4a}\right) \\ &= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \triangle}{4a}\right). \end{aligned}$$

Para la directriz tendremos

$$\begin{aligned} y &= y_0 - \frac{1}{4a} \\ &= -\frac{\triangle}{4a} - \frac{1}{4a} \\ &= -\frac{1 + \triangle}{4a}. \end{aligned}$$

Claramente las coordenadas del vértice serán $V = (x_0, y_0) = (-\frac{-b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a})$, donde $\triangle = b^2 - 4ac$. □

Definición 2.30 (Ecuación de segundo grado)**.** Corresponde a encontrar la intersección de la parábola $ax^2 + bx + c$ con el eje OX:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

completando cuadrados en x

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

Observación 2.17. Si introducimos el llamado discriminante

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

queda

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$$

lo que provee

- $\triangle > 0$: dos raíces reales y distintas x_1 y x_2
- $\triangle = 0$: una raíz real doble $x_1 = x_2$
- $\triangle < 0$: ninguna raíz real

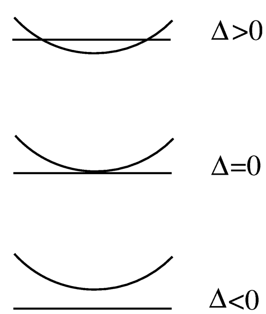


FIGURA 2.21. Discriminante y raíces.

Observación 2.18. En los dos primeros casos se puede encontrar entonces la siguiente factorización:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Definición 2.31 (Condición de tangencia)**.** El caso de discriminante nulo

$$\triangle = 0$$

también se conoce como **condición de tangencia** ya que corresponde justamente al caso en que la intersección es un único punto. Esta condición es útil por ejemplo para imponer la condición de que una recta sea tangente a una circunferencia o a una parábola, que dos circunferencias tangentes, que una parábola y una circunferencia tangentes, etc.

SECCIÓN 2.3

Escuela de Verano para estudiantes de Enseñanza Media Universidad de Chile

Secciones Cónicas

Definición 2.32 (Cónica)**.** Sean D y F una recta y un punto del plano tales que $F \notin D$. Sea e un número positivo.

Una cónica es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su distancia a F es e-veces su distancia a la recta D.

Es decir:

$$P \in \text{Cónica} \Leftrightarrow d(P,F) = e \cdot d(P,D), \qquad e > 0$$

- F es llamado **foco** de la cónica.
- D es llamada **directriz** de la cónica (veremos sólo el caso en que es vertical u horizontal).
- e es llamada **excentricidad** de la cónica.

Observación 2.19. Notar que el caso $e = 1$ corresponde a una parábola.

Es más, se tienen los siguientes casos:

- Si $e < 1$ la cónica se llamará **Elipse**.
- Si $e = 1$ la cónica se llamará **Parábola**.
- Si $e > 1$ la cónica se llamará **Hipérbola**.

2.3.1. Elipse

Definición 2.33. La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.

Para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la elipse es

$$\begin{aligned}
P = (x,y) \in \text{Elipse} \quad &\Leftrightarrow \quad PF = ePD \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e|x-d|; \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2dx + d^2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x^2(1-e^2) + 2x(e^2 d - f) + y^2 = e^2 d^2 - f^2.
\end{aligned}$$

Como la elección del foco y la directriz se ha realizado para que la ecuación sea simple, impondremos que $f = e^2 d$, con esto eliminamos el factor de primer grado en la ecuación y nos ahorramos una completación de cuadrado perfecto. Con esto, la ecuación de la elipse se reduce a

$$x^2(1-e^2) + y^2 = e^2 d^2 (1-e^2).$$

En la última expresión podemos dividir por $e^2d^2(1-e^2)$, con lo cual obtendremos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{e^2d^2}+\frac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)}=1.$$

Si en esta ecuación llamamos $a=ed$ y $b=ed\sqrt{1-e^2}$, entonces tendremos:

Observación 2.20. Ecuación general de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Donde

$$f=e^2d=ae$$

y

$$d=\frac{a}{e}.$$

Además

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

En consecuencia:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con}\, a>b.$$

corresponde siempre a una elipse con:

Excentricidad:	$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
Foco:	$F=(ae,0)$
Directriz:	$D: x=\frac{a}{e}$

Gráfico de la elipse

(i) Dado que en la ecuación aparecen x^2 e y^2, deducimos que se trata de una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes. En efecto, si $P=(x,y)$ es un punto cualquiera de la elipse, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Pero $(-y)^2=y^2$ y además $(-x)^2=x^2$, luego los puntos $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$, también satisfacen la ecuación, luego pertenecen a ella.

Como consecuencia de lo anterior, basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

(ii) En el primer cuadrante podemos despejar y en términos de x obteniendo

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x\leq a$, luego el gráfico de la elipse debe hacerse sólo en la zona entre $x=0$ y $x=a$ (del primer cuadrante).

(iii) También podemos despejar x en términos de y en el primer cuadrante obteniendo

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

De aquí vemos que y debe estar comprendido entre $y=0$ e $y=b$.

(iv) Siempre en el primer cuadrante, podemos obtener algunos puntos considerando que

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Partiendo en $x=0$ se obtiene $y=b$. Si x crece de 0 hasta a se ve que y decrece de b hasta 0. Al final, cuando $x=a$ se obtiene $y=0$.

Luego el gráfico será:

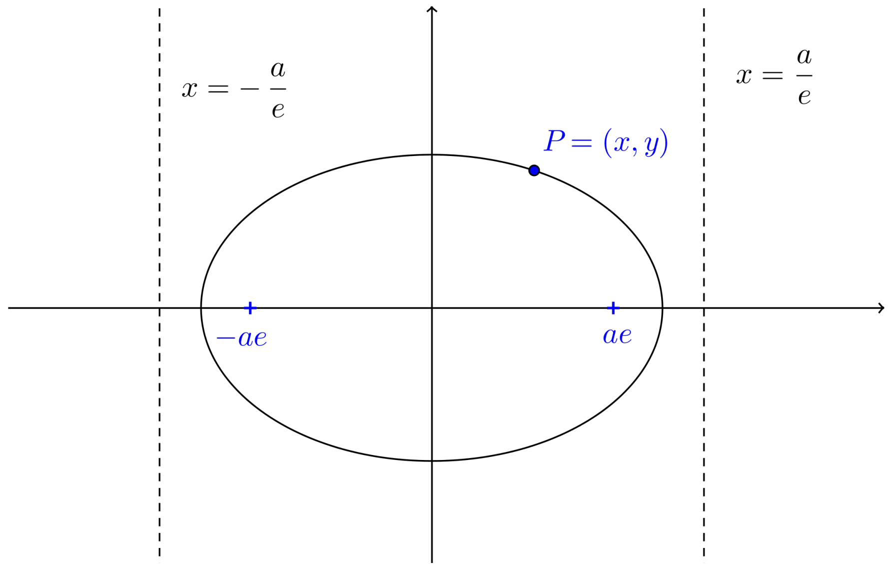


FIGURA 2.22. Gráfico de la elipse

Observación 2.21. Por la simetría del gráfico, se aprecia fácilmente que el punto $F' = (-ae, 0)$ y la recta D' de ecuación $x = -\frac{a}{e}$ funcionan como un foco y directriz de la elipse. Por lo tanto la elipse tiene dos focos y dos directrices.

Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.

Entonces es claro que

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''.$$

Luego

$$PF + PF' = e(PP' + PP'') = eP'P'' = e\frac{2a}{e} = 2a.$$

es decir

$$PF + PF' = 2a.$$

Observación 2.22.
1. Si $a < b$ entonces la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ corresponde a una elipse donde se han intercambiado los roles de x e y y los roles de a y b, de modo que $e = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, $F = (0, be)$, $F' = (0, -be)$, $D : y = \frac{b}{e}$ y $D' : y = -\frac{b}{e}$.
2. En consecuencia la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a \neq b$ representa siempre a una elipse de semiejes a y b, que es horizontal si $a > b$ o vertical si $a < b$.
3. Si $a = b$ entonces la ecuación corresponde a una circunferencia de radio a y no a una elipse.

2.3.2. Hipérbola

Definición 2.34. La **hipérbola** corresponde al caso $e > 1$.

Nuevamente, para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la hipérbola es

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \text{Hipérbola} \quad &\Leftrightarrow \quad PF = ePD \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e|x - d|; \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2dx + d^2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad -x^2(e^2 - 1) + 2x(e^2 d - f) + y^2 = e^2 d^2 - f^2.
\end{aligned}$$

En este caso también elegiremos $f = e^2 d$ para evitarnos una completación de cuadrados.

Con esto la ecuación de la hipérbola será:

$$-x^2(e^2 - 1) + y^2 = -e^2 d^2(e^2 - 1).$$

En la última expresión podemos dividir por $-e^2 d^2(e^2 - 1)$, con lo cual obtendremos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{e^2 d^2} - \frac{y^2}{e^2 d^2(e^2 - 1)} = 1.$$

Aquí, si llamemos $a = ed$ y $b = ed\sqrt{e^2 - 1}$, entonces tendremos

Definición 2.35 (Ecuación general de la hipérbola:)**.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$f = e^2 d = ae \qquad \text{y} \qquad d = \frac{a}{e}$$

Además

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

En consecuencia:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con}\, a > b$$

corresponde siempre a una hipérbola con:

Excentricidad:	$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
Foco:	$F = (ae, 0)$
Directriz:	$D : x = \frac{a}{e}$

Gráfico de la hipérbola

(I) Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, deducimos que se trata de una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes. En efecto, si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Pero $(-y)^2 = y^2$ y además $(-x)^2 = x^2$, luego los puntos $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, también satisfacen la ecuación, luego pertenecen a ella.

Como consecuencia de lo anterior, basta con hacer el análisis gráfico de la hipérbola sólo en el primer cuadrante.

(II) En el primer cuadrante podemos despejar y en términos de x obteniendo

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \geq a$, luego el gráfico de la hipérbola debe hacerse sólo en la zona a la derecha de $x = a$ (en el primer cuadrante).

(III) También podemos despejar x en términos de y en el primer cuadrante obteniendo

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

De aquí vemos que y puede tomar cualquier valor.

(IV) Siempre en el primer cuadrante, podemos obtener algunos puntos considerando que

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Luego para $x = a$ se obtiene $y = 0$.

Además si x crece entonces y también crece

Por último si x toma valores muy grandes podemos hacer la siguiente aproximación:

$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - (\frac{a}{x})^2} \sim \frac{b}{a}x$$

Es decir la hipérbola se aproxima a la recta $y = \frac{b}{a}x$. Dicha recta se llama asíntota de la hipérbola.

Por simetría vemos que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son todas las asíntotas de la hipérbola.

Luego el gráfico será:

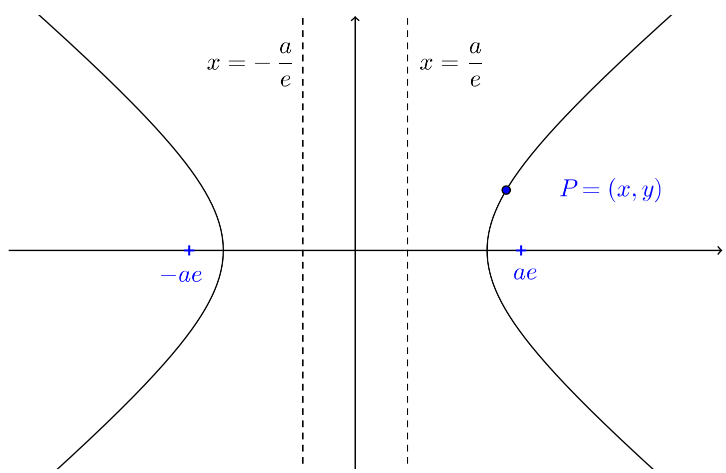


FIGURA 2.23. Gráfico de la hiperbola

Observación 2.23. Por la simetría del gráfico, se aprecia fácilmente que el punto $F' = (-ae, 0)$ y la recta D' de ecuación $x = -\frac{a}{e}$ funcionan como un foco y directriz de la hipérbola. Por lo tanto la hipérbola tiene dos focos y dos directrices.

Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.

Entonces es claro que

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''$$

Luego

$$PF' - PF = e(PP'' - PP') = eP'P'' = e\frac{2a}{e} = 2a$$

es decir

$$PF' - PF = 2a.$$

Observación 2.24.

1. La ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ corresponde a una hipérbola donde se han intercambiado los roles de x e y y los roles de a y b, de modo que $e = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$, $F(0, be)$, $F'(0, -be)$, $D : y = \frac{b}{e}$ y $D' : y = -\frac{b}{e}$.

   Las asíntotas serían $x = \pm\frac{a}{b}y$ es decir $y = \pm\frac{b}{a}x$, o sea las mismas asíntotas que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ estas dos hipérbolas que comparten las asíntotas se llaman hipérbolas conjugadas y sus ecuaciones se escriben:

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

2. Si $a = b$ entonces la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ se llama hipérbola equilátera.

   Estas hipérbolas tienen excentricidad $e = \sqrt{2}$ y sus asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes.

CAPÍTULO 3

Funciones

SECCIÓN 3.1

Definición de función y propiedades generales

3.1.1. Funciones

Definición 3.1 (Función, dominio y codominio)**.** Dados dos conjuntos A y B distintos de vacío, una "**función** de A en B" corresponderá $f \subseteq A \times B$, tal que:

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \text{ tal que } (x, y) \in f$$

Es decir a cualquier elemento del conjunto A se le asigna un único elemento en el conjunto B. Usualmente se escribe como $f : A \to B$ (la función f va de A a B) , y también para $(x, y) \in f$ se usa la notación $f(x) = y$ ($x \longmapsto f(x)$). Al conjunto A se le llama "**conjunto de partida o dominio**", se denota como $Dom(f)$ y al conjunto B se le llama "**conjunto de llegada o codominio**".

Ejemplo:

Veamos algunos ejemplos:

- Por ejemplo $\begin{aligned} f : \{\text{Las personas chilenas}\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \text{rut de la persona} \end{aligned}$ es una función.
- Consideremos la función $f : A = \{1, 2, 3\} \to B = \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, entonces:
  $$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$
  Notar que no necesariamente tenemos que "ocupar" todo el conjunto B.

- Dado un conjunto A se llama **identidad** de A a la siguiente función:
$$Id_A : A \to A, \text{ definida por } Id_A(x) = x \ (\forall x \in A)$$

Ejemplo:

- Si consideramos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$, los siguientes ejemplos NO son funciones:
  - $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (1, c)\}$
    No es función ya que para $x = 1$ tenemos dos valores para $y = a$ y $y = c$ tal que $(1, a) \in f$ y $(1, c) \in f$
  - $f = \{(1, a), (2, b)\}$
    No es función ya que para $x = 3$ no está definido $f(3)$.

Definición 3.2 (Igualdad de funciones)**.** Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, serán iguales si y solo si:

$$A = C \wedge B = D \wedge (\forall x \in A) f(x) = g(x)$$

Ejemplo:

Veamos algunos ejemplos:

- $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ y $\begin{array}{c} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ $(\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\})$ no son iguales ya que tienen distinto conjunto de llegada.
- $\begin{array}{c} f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \longmapsto (-1)^n \end{array}$ y $\begin{array}{c} f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \longmapsto \cos(n\pi) \end{array}$
  Como $\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es par} \\ -1 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases} = (-1)^n$
  $\Rightarrow f = g$

Observación 3.1. Si el conjunto de partida A de f y el conjunto de llegada B de f son subconjuntos de $\mathbb{R}$ se puede graficar f.

Definición 3.3 (Gráfico de una función)**.** Llamaremos **gráfico de una función** f al conjunto de puntos G_f en el plano definido por

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Dom(x) \wedge y = f(x)\}$$

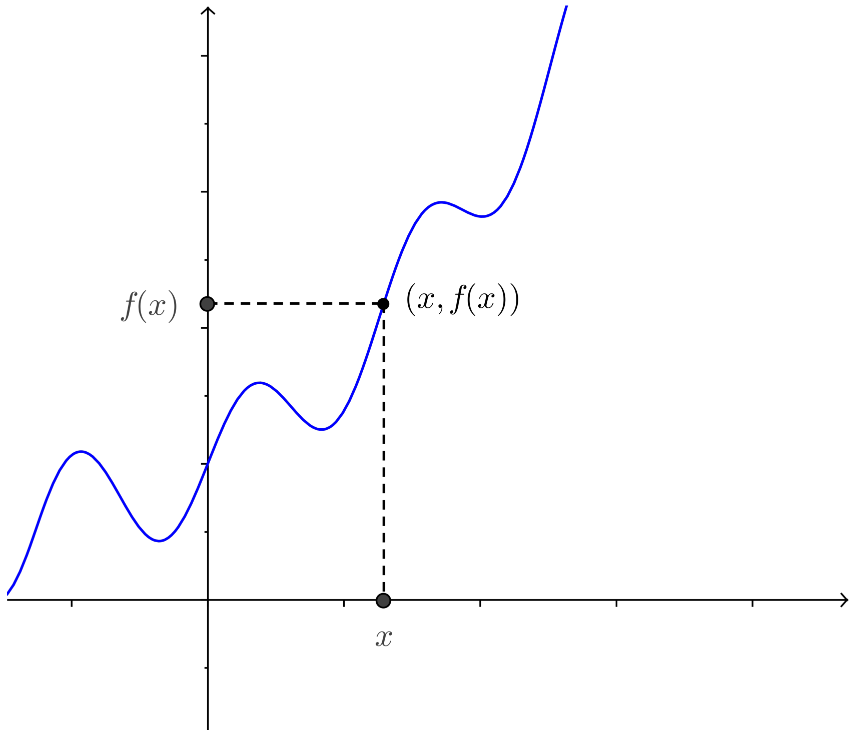


FIGURA 3.1. Representación gráfica de una función

3.1.2. Conjunto imagen y conjunto preimagen

Ejemplo:

Denotemos por Σ al conjunto de todas las secuencias de caracteres que podemos escribir en el teclado. $\Sigma \times \Sigma$ corresponde al producto cartesiano de Σ con Σ, esto es

$$(x, y) \in \Sigma \times \Sigma \Leftrightarrow x \in \Sigma \wedge y \in \Sigma$$

Notamos que x e y representan una "palabra" en Σ, entonces xy la concatenación[1] también será una palabra.

Así

$$\begin{aligned} concatenar : \Sigma \times \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto (x, y) \end{aligned} \quad xy$$

Es una función.

Por ejemplo: $concatenar(pre, fijo) = prefijo$, decimos entonces que "$prefijo$" es la **imagen** de $(pre, fijo)$ ¿Cuál es la **preimagen** de "$prefijo$"? Es decir ¿hay más pares de palabras que al concatenarlas de "prefijo"? Sí:

$$\left.\begin{array}{l} concatenar(p, refijo) \\ concatenar(pr, efijo) \\ concatenar(pre, fijo) \\ concatenar(pref, ijo) \\ concatenar(prefi, jo) \\ concatenar(prefij, o) \end{array}\right\} = prefijo$$

Entonces la palabra ”prefijo”tiene muchas preimágenes, a este conjunto le llamamos conjunto preimagen, esto lo denotamos como:

$$concatenar^{-1}(prefijo) = \{(p, refijo), ..., (prefij, o)\}$$

A continuación se entrega la definición formal de conjunto imagen y conjunto preimagen.

Definición 3.4 (Conjunto imagen y preimagen)**.** Consideremos una función $\begin{array}{rcl} f: A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$, y sean los conjuntos $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, entonces:

- El **conjunto imagen** de A' por f ($f(A')$) será el conjunto de los elementos en B que son imágenes de elementos de A', es decir:
$$f(A') = \{y \in B \mid \exists x \in A',\ y = f(x)\}$$
- El **conjunto preimagen** de B' ($f^{-1}(B')$) será el conjunto de los elementos de A que tienen por imagen a un elemento de B', es decir:
$$f^{-1}(B') = x \in A \mid f(x) \in B'$$

Observación 3.2. Notar que el conjunto imagen siempre está contenido en el conjunto de llegada, y el conjunto preimagen siempre esta contenido en el conjunto de partida.

Ejemplo:

Si consideramos la función $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, entonces:

- $f(\{2, 3, 4\}) = \{4, 9, 16\}$
- $f(\{-1\}) = \{1\}$
- $f(\{-1\}) = \{1\}$
- $f^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\}$
- $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$
- $f^{-1}(\phi) = \phi$
- $f(\phi) = \phi$

Las dos últimas son propiedades generales.

3.1.3. Ceros y recorrido de una función

Definición 3.5 (Ceros de una función)**.** Sea f: $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, llamaremos **ceros de la función** f a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$, en estos puntos el gráfico de la función corta al eje OX., también denotamos el conjunto de ceros de f como:

$$Z(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$$

También llamaremos **intersección con el eje** OY al punto de coordenadas $(0, f(0))$.

Ejemplo:

Los ceros de la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es el conjunto $\{0,1,2\}$, y la intersección con el eje OY es el punto $(0,0)$.

Definición 3.6 (Recorrido de una función)**.** Sea f: $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, llamaremos **recorrido de** f al conjunto definido por

$$Rec(f) = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Ejemplo:

El recorrido de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ es el conjunto $[0, \infty)$

3.1.4. Crecimiento de una función

Definición 3.7 (Crecimiento)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Diremos que f es **creciente** en $B \subseteq A$ ssi $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Diremos que f es **decreciente** en $B \subseteq A$ ssi $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Diremos que f es **creciente estricta** en $B \subseteq A$ ssi $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Diremos que f es **decreciente estricta** en $B \subseteq A$ ssi $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Además si $B = A$ diremos que f es creciente o decreciente según corresponda, en cualquier caso diremos que f **monótona**

Ejemplo:

Consideremos la función $f(x) = x^2$, analizaremos el crecimiento de esta función, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, nos separamos en dos casos:

- Si $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [x_2 - x_1 > 0] \wedge [x_1 + x_2 > 0] \\ &\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_1 + x_2) > 0 \\ &\Rightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0 \\ &\Rightarrow x_2^2 > x_1^2 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

  luego f es creciente en $[0, \infty)$.

- Si $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [x_2 - x_1 > 0] \wedge [x_1 + x_2 < 0] \\ &\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_1 + x_2) < 0 \\ &\Rightarrow x_2^2 - x_1^2 < 0 \\ &\Rightarrow x_2^2 < x_1^2 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

  luego f es decreciente en $(-\infty, 0)$.

Y se puede resumir en una tabla, de la siguiente manera:

	$(-\infty, 0)$	$[0, \infty)$
f	$\searrow$	$\nearrow$

3.1.5. Paridad de una función

Definición 3.8 (Paridad)**.** Sea una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in A$ $-x \in A$, entonces:

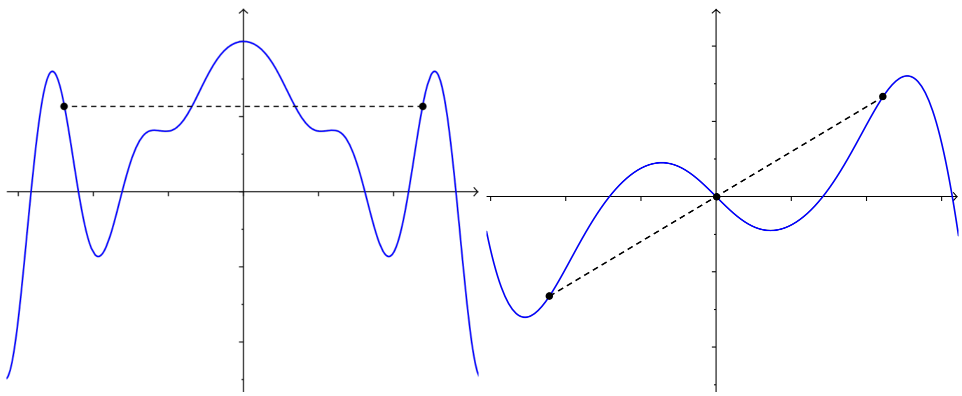
- Diremos que f es una función **par** ssi $(\forall x \in A)$ $f(-x) = x$.
- Diremos que f es una función **impar** ssi $(\forall x \in A)$ $f(-x) = -x$.

Ejemplo:

- $f(x) = c$ está definida sobre todo $\mathbb{R}$, además $f(-x) = c = f(x)$, luego f es una función par.
- $f(x) = x$ está definida en todo real, además $f(-x) = -x = -f(x)$, luego f es una función impar.

- $f(x) = x^2$ con $Dom(f) = \mathbb{R}$, y cumple que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, luego f es una función par.
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + x^3$, no puede ser ni par ni impar ya que no cumple la condición para el dominio, es decir no se tiene que $(\forall x \in [0,1] \Rightarrow -x \in [0,1])$.

Observación 3.3. Gráficamente las funciones pares son simétricas respecto el eje OY (simetría axial), mientras que las funciones impares son simétricas respecto el origen $(0,0)$ (simetría puntual).



(A) Función par (B) Función impar

FIGURA 3.2. Gráfico de función par v/s función impar

3.1.6. Funciones periódicas

Definición 3.9 (Periodicidad)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es una función **periódica** ssi $(\exists p > 0)$ tal que:

- $(\forall x \in A)\ x + p \in A$.
- $f(x + p) = f(x)$.

En este caso p se llama **periodo** de la función.

Definición 3.10 (Periodo mínimo)**.** Se llama **periodo mínimo** de la función f al real $p^\star$ tal que f es periódica de periodo $p^\star$ y además si f es periódica de periodo p, entonces $p \geq p^\star$

Ejemplo:

- $f(x) = c$ es periódica de periodo $p > 0$ cualquiera, pero no tiene periodo mínimo.

- $f(x) = x - [x]$, donde $[x]$ es el mayor entero menor que x, es periódica de periodo $p = 1, 2, 3..$ y su periodo mínimo es $p^{\star} = 1$.

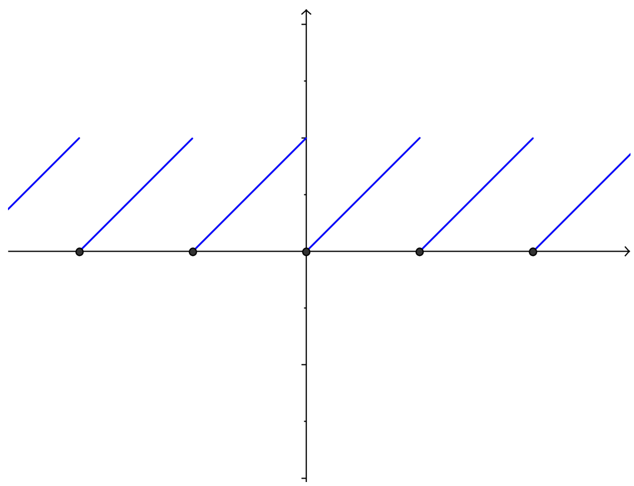


Figura 3.3. Gráfico de la función $x - [x]$

3.1.7. Funciones acotadas

Definición 3.11 (Acotamiento)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, entonces:

- Diremos que f es acotada inferiormente ssi $(\exists m \in R)$ tal que $(\forall x \in Dom(f))\ m \leq f(x)$
- Diremos que f es acotada superiormente ssi $(\exists M \in R)$ tal que $(\forall x \in Dom(f))\ M \geq f(x)$
- Diremos que f es acotada ssi es acotada inferior y superiormente, o equivalentemente
$$(\exists M > 0)(\forall x \in Dom(f))\quad |f(x)| \leq M$$

Ejemplo:

- $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ es acotada inferiormente por $c - 1$ y acotada superiormente por $c + 1$, luego f es acotada.
- $f(x) = sen(x)$ es una función acotada pues $|sen(x)| \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = a^x$, con $a > 0$ es una función acotada inferiormente por 0, pero no es acotada superiormente.
- $f(x) = -a^x$, con $a > 0$ es una función acotada superiormente por 0, pero no es acotada inferiormente.
- $f(x) = x$ no es acotada ni superior ni inferiormente.

3.1.8. Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

Definición 3.12 (Inyectividad)**.** Una función $\begin{array}{rl} f: A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}$ se dice **inyectiva** si y solo si:

$$(\forall x, y \in A)\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(x)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ f(x) = f(x) \Rightarrow x = y$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

La función $\begin{array}{rl} f: [-1,1] & \longrightarrow [-1,1] \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$ no es inyectiva, ya que para $x = -1$ y $x = 1$ se tiene que $f(x) = 1$.

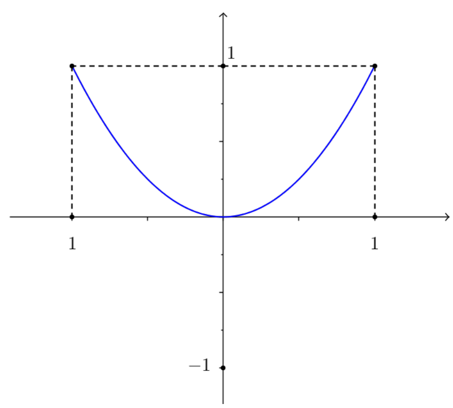


Figura 3.4. Gráfico de la función $f(x) = x^2$

Ejemplo:

La función $\begin{array}{rl} f: [0,1] & \longrightarrow [-1,1] \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$ es inyectiva, ya que en efecto si $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow x^2 = y^2$
$\Rightarrow x = y \therefore f$ es inyectiva.

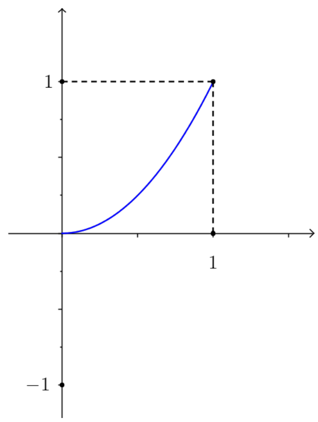


FIGURA 3.5. Gráfico de la función $f(x) = x^2$, con domino restringido de modo que sea inyectiva.

Definición 3.13 (Sobreyectividad)**.** Una función $\begin{array}{rl} f: A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}$ se dice **sobreyectiva** si y solo si:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) \text{ tal que } y = f(x)$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

- La función $\begin{array}{rl} f: [-1,1] & \longrightarrow [-1,1] \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$ no puede ser sobreyectiva, ya que la $f(x)$ siempre es positivo, por lo tanto si tomamos por ejemplo $-1 \in \mathbb{R}$ (conjunto de llegada), no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ (conjunto de partida) tal que $f(x) = -1$.
- La función $\begin{array}{rl} f: [-1,1] & \longrightarrow [0,1] \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$ es sobreyectiva ya que si tomamos un $y \in \mathbb{R}_+$ es posible encontrar un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, en este caso $x = \sqrt{y}$, ya que $f(\sqrt{y}) = \sqrt{y}^2 = |y| = y$.

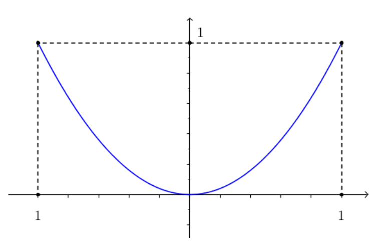


FIGURA 3.6. Gráfico de la función $f(x) = x^2$, con conjunto de llegada restringido de modo que sea sobreyectiva.

Definición 3.14 (Biyectividad)**.** Una función $\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$ se dice **biyectiva** si y solo si:

$$f \text{ es inyectiva y sobreyectiva}$$

Ejemplo:

La función $\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$ es sobreyectiva e inyectiva, por lo tanto es biyectiva.

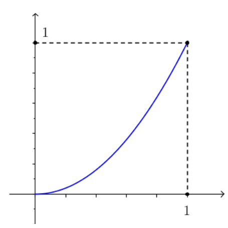
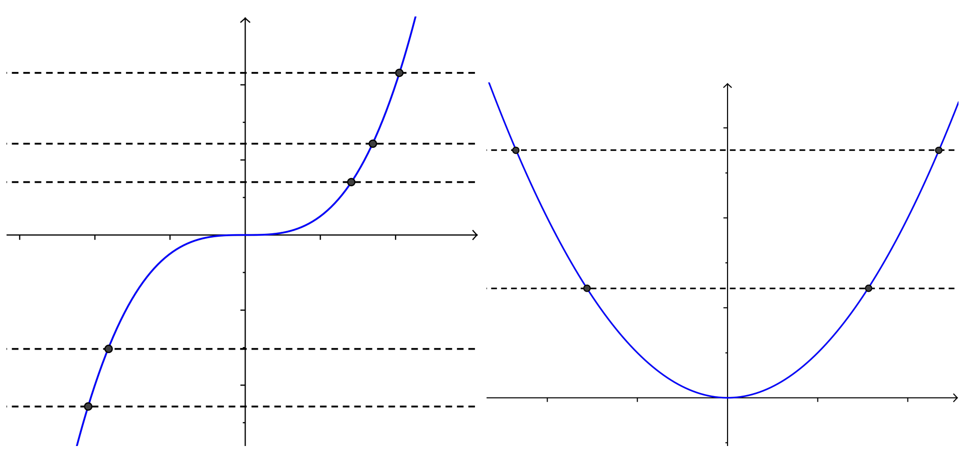


FIGURA 3.7. Gráfico de la función $f(x) = x^2$, con domino y conjunto de llegada restringido de modo que sea biyectiva.

3.1.9. Gráfico de funciones inyectivas y sobreyectivas

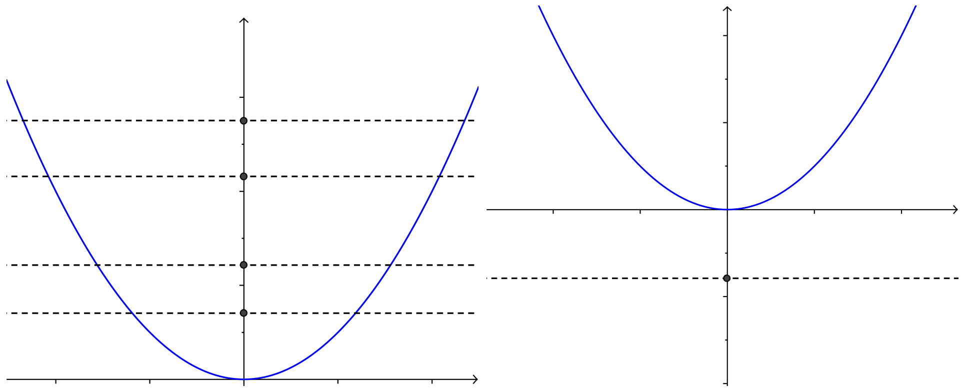
Gráficamente una función **inyectiva** es tal que toda linea horizontal que pase por el gráfico intersecte en un único punto.



(A) Función inyectiva (B) Función no inyectiva

FIGURA 3.8. Gráfico de función inyectiva y no inyectiva

Y una función **sobreyectiva** es tal que toda linea horizontal que pase por el gráfico intersecte en al menos un punto.



(A) Función sobreyectiva (B) Función no sobreyectiva

FIGURA 3.9. Gráfico de función sobreyectiva y no sobreyectiva

3.1.10. Composición de funciones

Definición 3.15 (Composición de funciones)**.** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, entonces podemos definir una nueva función $g \circ f$, la cual llamaremos **composición** de g con f, y es tal que

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo:

- Si consideramos $f(x) = sen(x)$, y $g(x) = cos(x)$, entonces $(g \circ f)(x) = cos(sen(x))$
- Si consideramos $f(x) = 2x + 3$, y $g(x) = e^x$, entonces $(g \circ f)(x) = e^{2x+3}$
- Si consideramos $f(x) = 4x + 1$, y $g(x) = \frac{(x-1)}{4}$, entonces
$$(g \circ f)(x) = \frac{((4x+1)-1)}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

3.1.11. Función inversa

Definición 3.16 (Función inversa)**.** Sea $f : A \to B$ una función biyectiva, entonces se define la función inversa de f como la función f^{-1} definida por:

$$f^{-1} : B \to A \text{ tal que } y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = y$$

además se satisface que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Ejemplo:

- La función identidad $f(x) = x$ tiene como inversa la misma función identidad, $f^{-1} = x$.
- La función $f(x) = 4x + 1$ del ejemplo anterior tiene como inversa $f^{-1} = \frac{(x-1)}{4}$.
- La función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^n$ tiene como inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Observación 3.4. Gráficamente la inversa de una función es exactamente la reflexión del gráfico de la función directa respecto la función identidad $f(x) = x$.

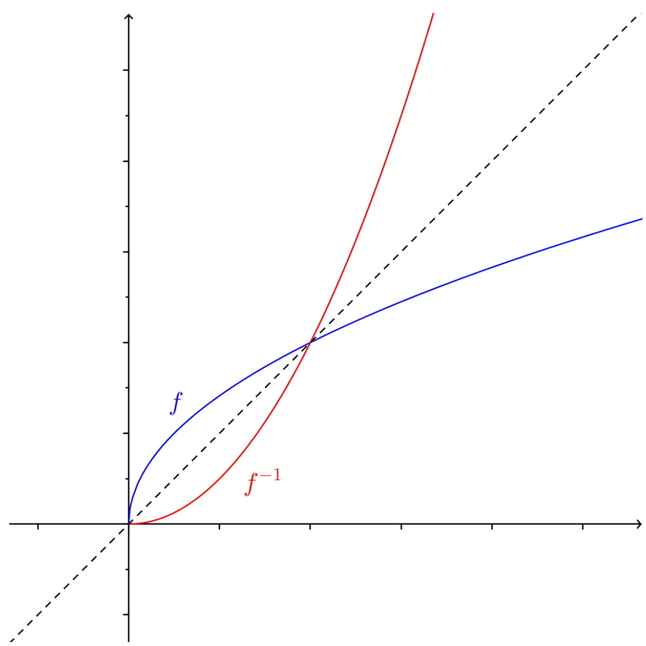


FIGURA 3.10. Gráfico de una función y su inversa

SECCIÓN 3.2

Funciones Básicas

3.2.1. Función lineal afín

Definición 3.17 (Función lineal afín o recta). Una **función lineal afín** es una función definida por $f(x) = mx+n$, con $m, n \in R$ fijos, a m le llamamos **pendiente** y a n **coeficiente de posición**, además su gráfico corresponde a una recta.

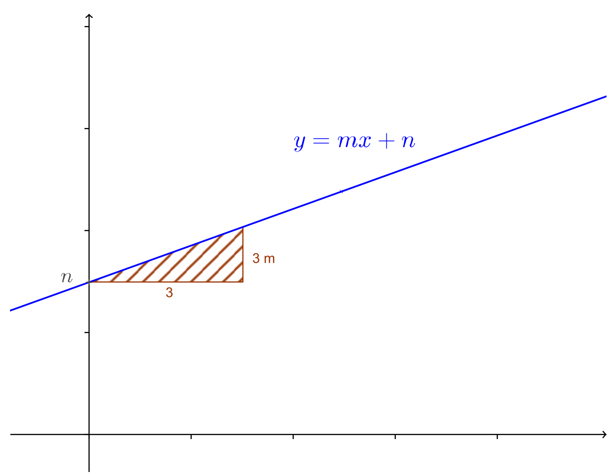


FIGURA 3.11. Gráfico de una recta $y = mx + n$

Ecuación de la recta

Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera de plano con $A \neq B$, entonces existe una única recta que pasa por estos dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}(x - x_1)$$

Donde $\frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}$ corresponde a la pendiente de la recta. Notar que el caso $x_1 = x_2$ cuando es una recta vertical no es función.

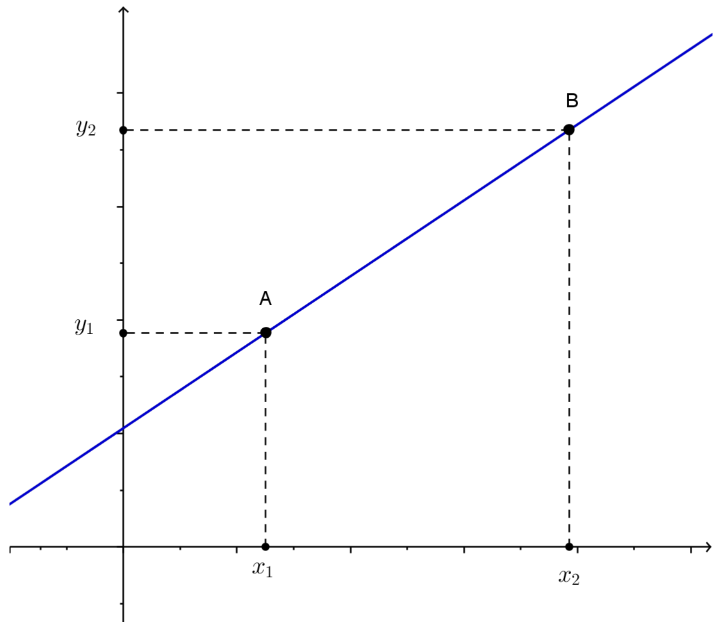


FIGURA 3.12. Ecuación de la recta

Definición 3.18 (Ecuación general de la recta)**.**

$$L : ax + by + c = 0$$

Definición 3.19 (Ecuación principal de la recta)**.**

$$L : y = mx + n$$

De la ecuación general a la principal

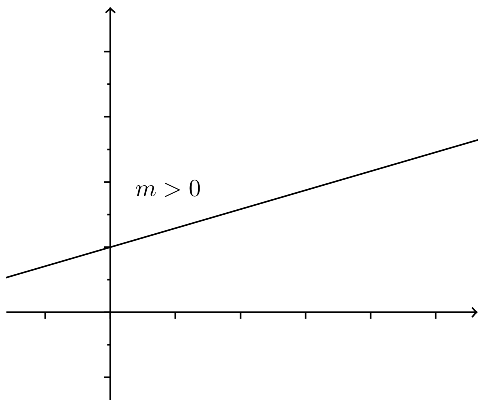
Dada una recta en su forma general $ax + by + c = 0$, podemos escribirla en su forma principal:

$$\begin{aligned} ax + by + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{(ax + c)}{b} \\ &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{aligned}$$

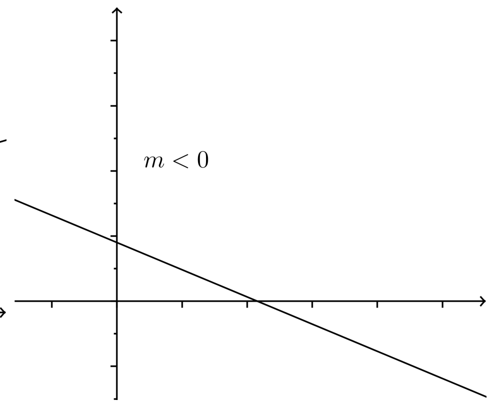
De este modo podemos identificar la pendiente de la recta $m = -\frac{a}{b}$, y el coeficiente de posición con $n = -\frac{c}{b}$.

Pendiente de una recta

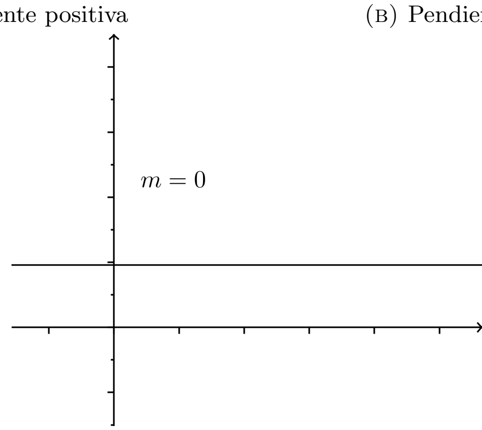
Dada una recta de ecuación $y = mx + n$ la pendiente de una recta es la cantidad que crece la recta cuando se avanza en una unidad a la derecha, de este modo el signo de la pendiente m determinará el crecimiento de la recta de modo que si $m > 0$ la recta será creciente, si $m < 0$ la recta sera decreciente y si $m = 0$ la recta será horizontal.



(A) Pendiente positiva



(B) Pendiente negativa



(C) Pendiente nula

Figura 3.13. Gráfico de la recta según su pendiente

3.2.2. Función cuadrática

Definición 3.20 (Función cuadrática o parábola)**.** Una **parábola** es una función definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, cuyo gráfico es el de una parábola.

Forma canónica de una parábola

Otra forma de escribir la ecuación de una parábola es en su forma canónica:

$$P : y - y_1 = C(x - x_1)^2$$

Donde el punto $V = (x_1, y_1)$ es el **vértice** de la parábola, y en ese caso y_1 será el **punto mínimo o máximo** dependiendo de la concavidad de la parábola y la recta $x = x_1$ se llama el **eje de simetría** de la parábola.

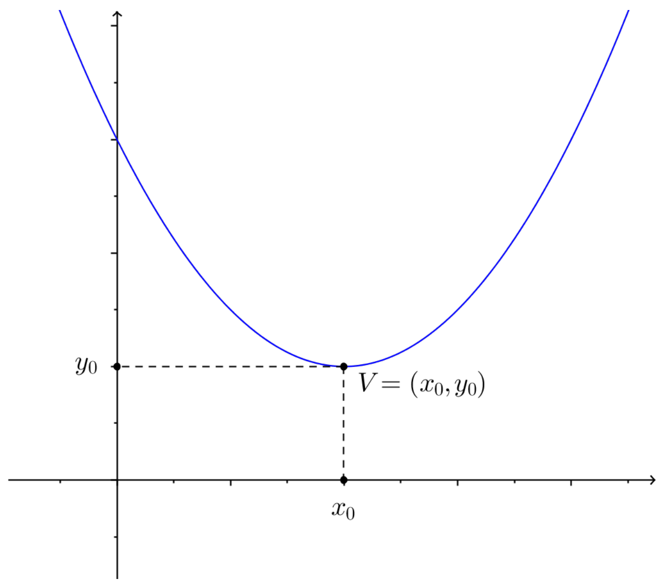


FIGURA 3.14. Gráfico de una parábola

De la ecuación general a la forma canónica

Podemos escribir la ecuación general en su forma canónica:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{2b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x^2 + \frac{2b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \end{aligned}$$

$$y - \left(-\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}\right) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$$

De esta forma el vértice de una parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$ será

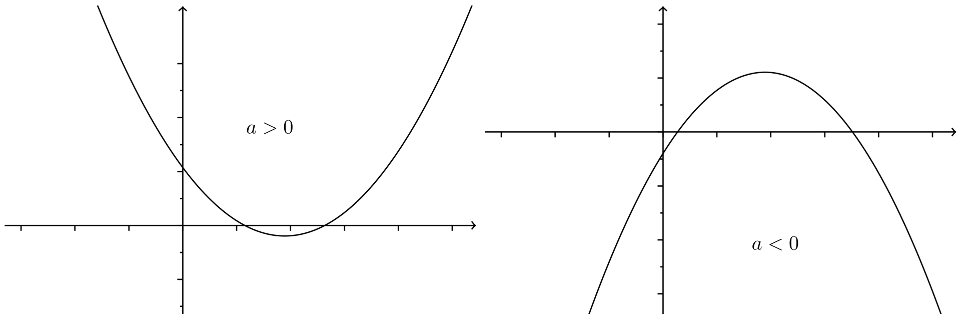
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$$

Definición 3.21 (Discriminante)**.** Dada una parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$ llamaremos **discriminante** de la parábola a la siguiente cantidad:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Concavidad de una parábola

Dada una parábola de la forma $y = a^2 + bx + c$ la concavidad de esta depende del signo del del coeficiente a, de modo que si $a > 0$ la parábola será **convexa** y si $a < 0$ la parábola será **cóncava**.



(A) Convexa (B) Cóncava

FIGURA 3.15. Concavidad de una parábola

3.2.3. Traslación y escalamiento de una función

Escalamiento de una función

Dada una función f una cosa interesante de analizar será el cambio que produce el generar una nueva función af donde $a \in R$, se dice que la función af corresponde a un **escalamiento** de la función f.

Se tienen diferentes casos, el caso $a = 0$ es fácil, los otros casos los ilustraremos con un gráfico, consideremos que $0 < a < 1 < b$.

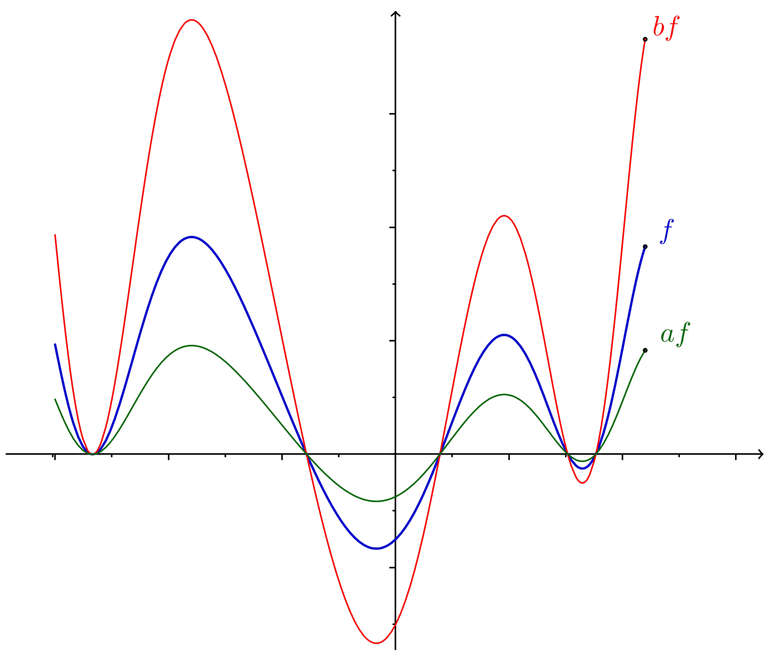


FIGURA 3.16. Escalamiento de una función $0 < a < 1 < b$

Por otra parte se tiene la función $-f$:

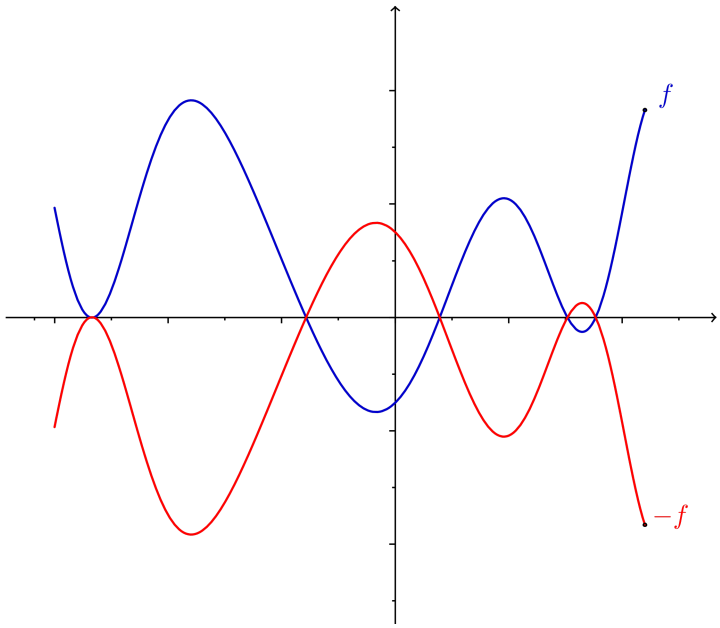


FIGURA 3.17. Escalamiento de una función: $-f$

Traslación de una función

Dada una función f nos va a interesar saber cómo generar nuevas funciones que tengan el mismo gráfico de la función f salvo por que ahora están trasladado en un vector (x_0, y_0).

Supongamos que tenemos una función f su gráfico será :

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Dom(f)\}$$

Al trasladar el conjunto G_f por el vector (x_0, y_0) se obtiene

$$G_f + (x_0, y_0) = \{(x + x_0, f(x) + y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Dom(f)\}$$

Luego queremos saber qué función tiene por gráfico al conjunto $G_f + (x_0, y_0)$ Basta con notar que :

$$\begin{aligned} G_f + (x_0, y_0) &= \{(x + x_0, f(x) + y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Dom(f)\} \\ &= \{(x', f(x' - x_0) + y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x' - x_0 \in Dom(f)\} \\ &= \{(x', f(x' - x_0) + y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x' \in Dom(f) + x_0\} \end{aligned}$$

Luego definiendo la función $g(x) = f(x - x_0) + y_0$, con dominio $Dom(g) = Dom(f) + x_0$ se tiene que

$$G_g = \{(x, f(x - x_0) + y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x' \in Dom(f) + x_0\}$$

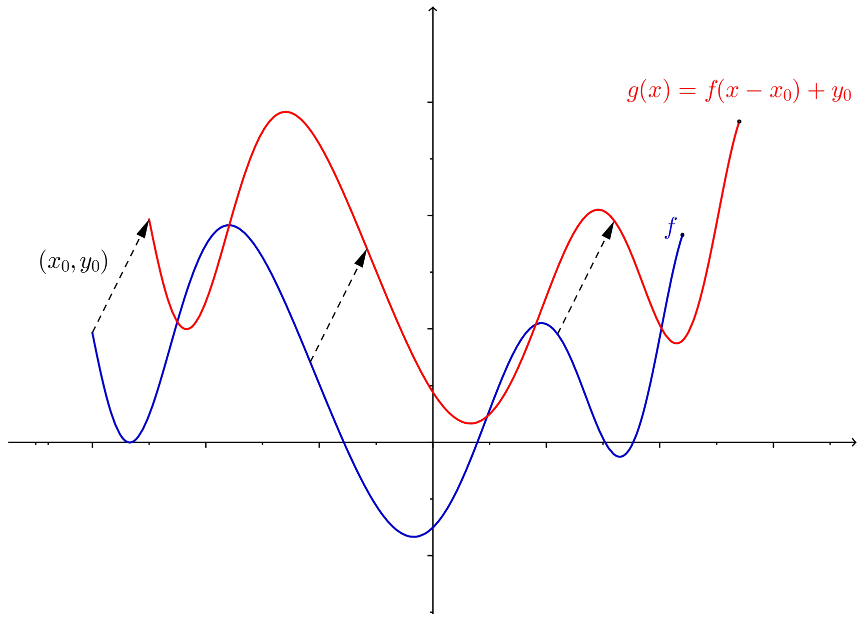


Figura 3.18. Traslación de una función f en (x_0, y_0)

3.2.4. Función definida por partes

Definición 3.22 (Función definida por partes)**.** Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, con $A \cap B = \phi$, entonces podemos definir la siguiente función **definida por partes**.

$$h : A \cup B \to \mathbb{R} \text{ definida por } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Ejemplo:

Consideremos las funciones $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$, y la función $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x + 2$, podemos definir la siguiente función

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] \\ -x + 2 & \text{si} \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$$

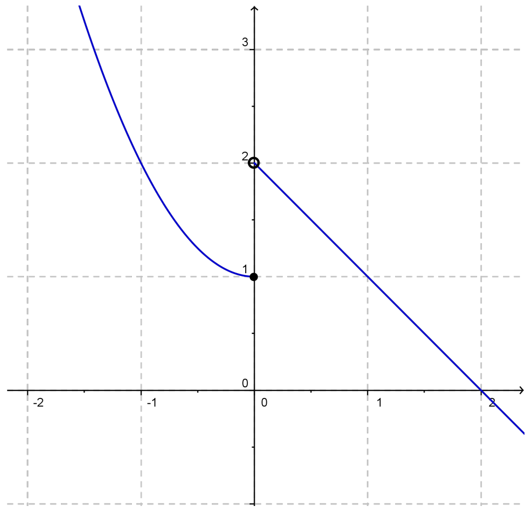


Figura 3.19. Gráfico de una función definida por partes; ejemplo anterior.

3.2.5. Función valor absoluto o módulo

Definición 3.23 (Función valor absoluto o módulo)**.** Se define la función **valor absoluto** como $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] \\ x & \text{si} \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$$

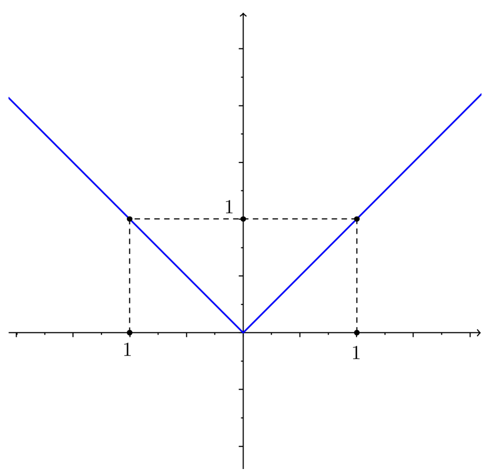


Figura 3.20. Gráfico de la función valor absoluto

3.2.6. Función Raíz

Definición 3.24 (Función Raíz)**.** Se tiene la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$, es la función cuadrática restringida de modo que resulta una función biyectiva, la función inversa de esta restricción se conoce como la **función raíz cuadrada**, que denotaremos como $\sqrt{\cdot}$ $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$.

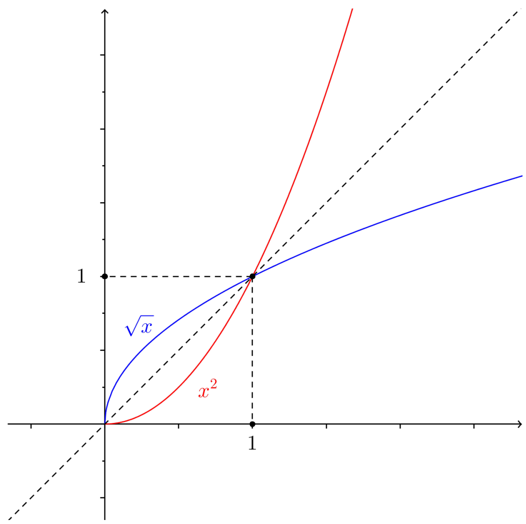


FIGURA 3.21. Gráfico de la función raíz cuadrada

3.2.7. Función escalón o cajón inferior o parte entera

Definición 3.25 (Función parte entera)**.** Se define la función cajón inferior de x como $[x]$ = "el mayor entero menor o igual a x", esta función está definida sobre todo $\mathbb{R}$ y la podemos definir formalmente de la siguiente manera:

$$[x] = n \text{ si } x \in [n, n+1), \ n \in \mathbb{Z}$$

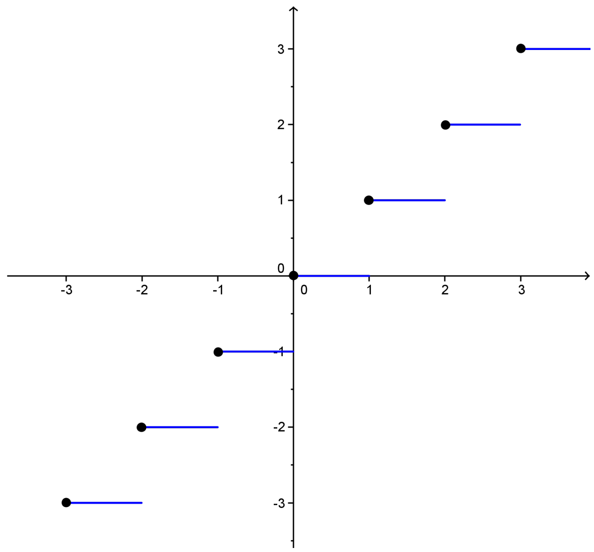


FIGURA 3.22. Gráfico de la función parte entera

3.2.8. Otras maneras de obtener nuevas funciones

Álgebra de funciones

Definición 3.26 (Álgebra de funciones)**.** Sean f, g dos funciones y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. entonces definimos las funciones suma diferencia, ponderación, producto y cuociente por:

1. Función suma:
$$f + g : Dom(f) \cap Dom(g) \to \mathbb{R} \text{ tal que } (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
2. Función diferencia:
$$f - g : Dom(f) \cap Dom(g) \to \mathbb{R} \text{ tal que } (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$
3. Función ponderación:
$$\lambda f : Dom(f) \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$
4. Función producto:
$$f \cdot g : Dom(f) \cap Dom(g) \to \mathbb{R} \text{ tal que } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
5. Función cuociente:
$$\frac{f}{g} : Dom(f) \cap Dom(g) \setminus Z(g) \to \mathbb{R} \text{ tal que } \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Función máximo y mínimo

Dados dos valores reales a, b podemos definir la operación máximo y mínimo entre a y b de la siguiente manera:

$$\text{máx}\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

$$\text{mín}\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

Lo que nos motiva a definir las funciones máximo y mínimo entre funciones como sigue.

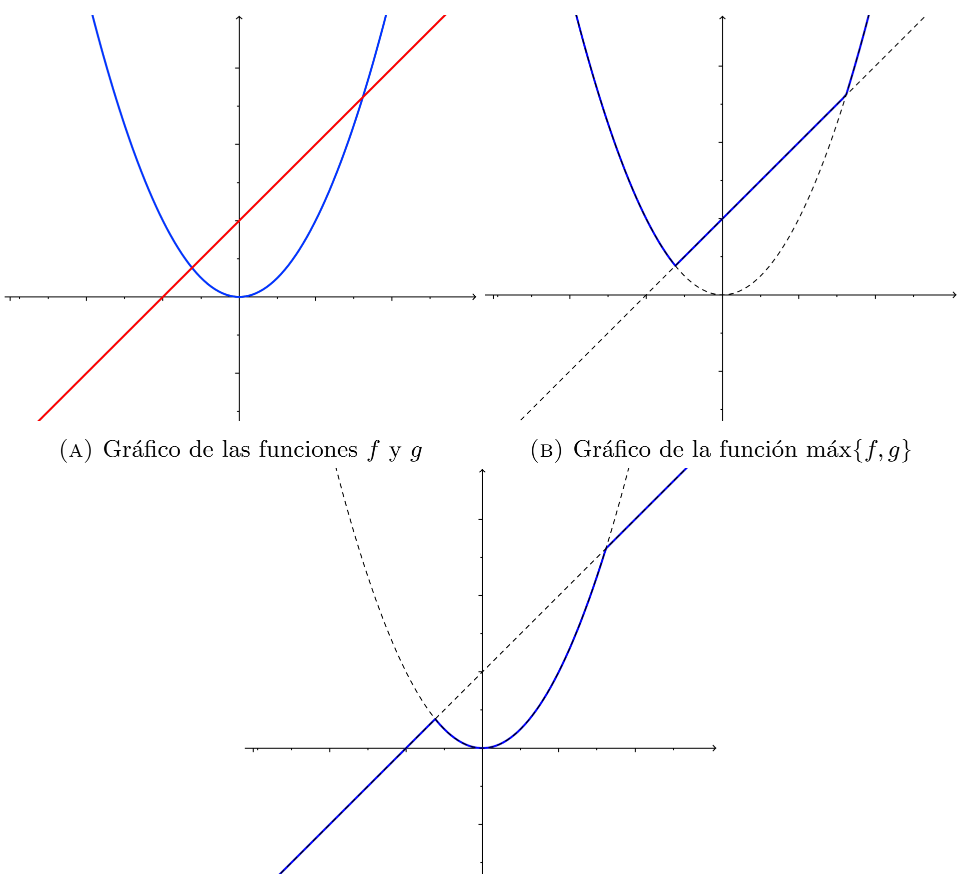
Definición 3.27 (Función máximo y mínimo)**.** Sean f, g dos funciones. entonces definimos las funciones máximo y mínimo entre f y g, de la siguiente manera.

$$\text{máx}\{f, g\} : Dom(f) \cap Dom(g) \to \mathbb{R}, \text{ definida por } \text{máx}\{f, g\}(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

$$\text{mín}\{f, g\} : Dom(f) \cap Dom(g) \to \mathbb{R}, \text{ definida por } \text{mín}\{f, g\}(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$$

Ejemplo:

Si consideramos $f(x) = x^2$, y $g(x) = x + 1$, entonces las funciones $\text{máx}\{f, g\}$ y $\text{mín}\{f, g\}$ tienen los siguientes gráficos:



(A) Gráfico de las funciones f y g

(B) Gráfico de la función $\text{máx}\{f, g\}$

(C) Gráfico de la función $\text{mín}\{f, g\}$

FIGURA 3.23. Gráfico de la función máximo y mínimo entre f y g

SECCIÓN 3.3

Otras funciones importantes

3.3.1. Funciones Polinomiales y racionales

Funciones Polinomiales

Definición 3.28 (Funciones Polinomiales)**.** Las **funciones polinomiales** son funciones de la forma:

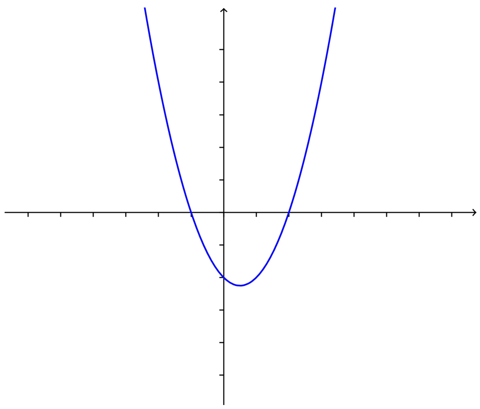
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ son constantes reales.

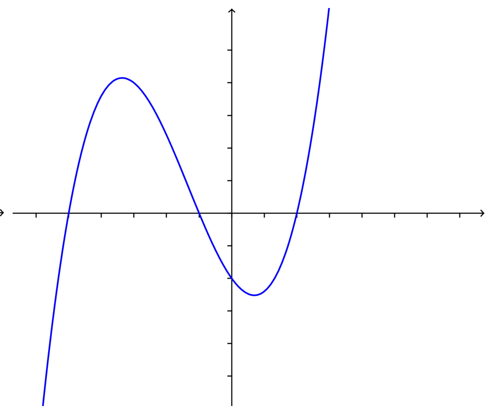
Estas funciones tienen siempre $Dom(f) = \mathbb{R}$ y a n se le llama grado del polinomio f.

Observación 3.5.

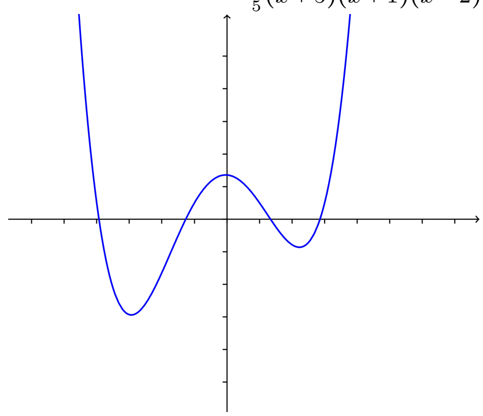
- Si $n = 1$, corresponde a una recta.
- Si $n = 2$, corresponde a una parábola.
- Para $n > 2$ en general el gráfico no es sencillo.



(A) Gráfico polinomio de grado 2, $f(x) = x^2 - x + 2$



(B) Gráfico polinomio de grado 3, $f(x) = \frac{1}{5}(x+5)(x+1)(x-2)$



(C) Gráfico polinomio de grado 4, $f(x) = \frac{1}{14}(x+4)(x-1)(x+1)(x-3) + \frac{1}{2}$

FIGURA 3.24. Gráfico de funciones polinomiales

Funciones Racionales

Definición 3.29 (Funciones Racionales)**.** Dadas f, g funciones dos polinomiales:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

llamamos **función racional** a una función de la forma:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Estas funciones $Dom(h) = \mathbb{R} \setminus Z(g)$, y sus ceros son los ceros de f.

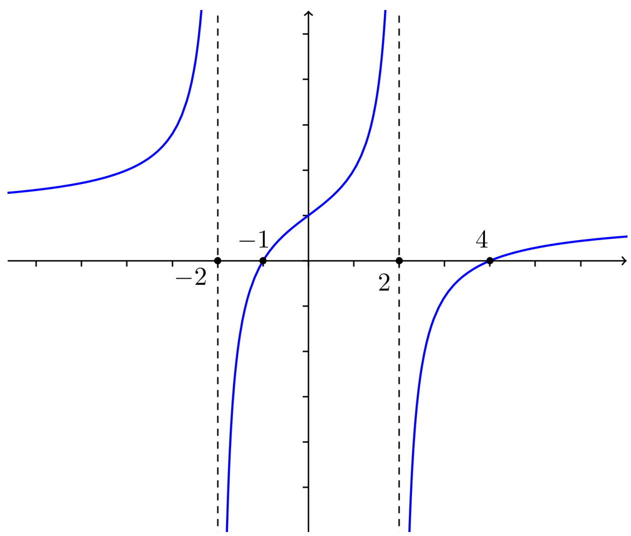


FIGURA 3.25. Gráfico de una función racional $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2-4}$

3.3.2. Función Exponencial y Logaritmo

Función Exponencial

Definición 3.30 (Función exponencial)**.** Una función de tipo **exponencial** será una función de la forma $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ fijo, diremos que f es una función exponencial de base a.

Propiedades de las funciones exponenciales

- Está definida en todo real.
- Para $a > 1$ es estrictamente creciente en todo su dominio, y para $a < 1$ es estrictamente decreciente.
- Su recorrido es $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, por lo que no tiene ceros.
- $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^0 = 1$

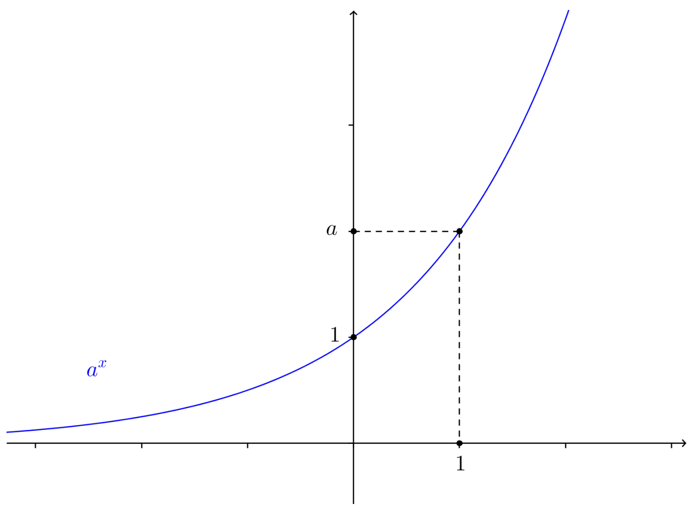


FIGURA 3.26. Gráfico de la función exponencial, $a > 1$

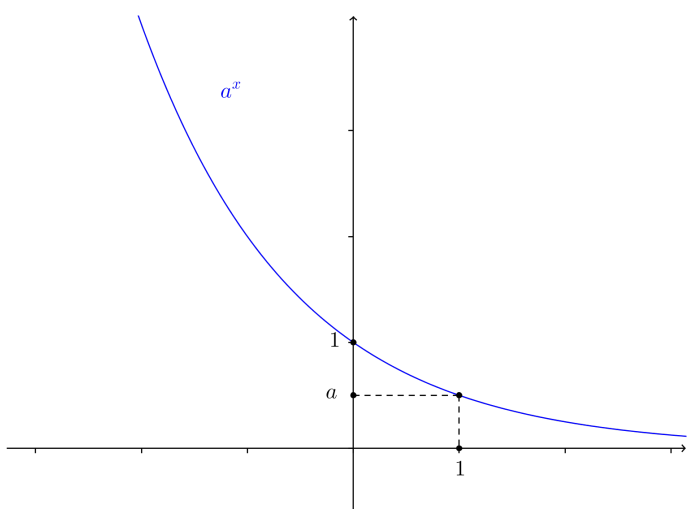


FIGURA 3.27. Gráfico de la función exponencial, $a < 1$

Función Logaritmo

Definición 3.31 (Función Logaritmo)**.** Se tiene que la función $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ $f(x) = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$, es decir la función exponencial de base a, es una función biyectiva, de manera que tiene una función inversa, a la función inversa la llamaremos función **logaritmo en base** a, que denotaremos como $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \log_a(x)$.

Propiedades de la función logaritmo

- Para $a > 1$ es estrictamente creciente en todo su dominio, y para $a < 1$ es estrictamente decreciente.

- Su único cero es en $x = 1$.
- $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(a \cdot y)$
- $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$
- $-\log_a(x) = \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\log_a(1) = 0$

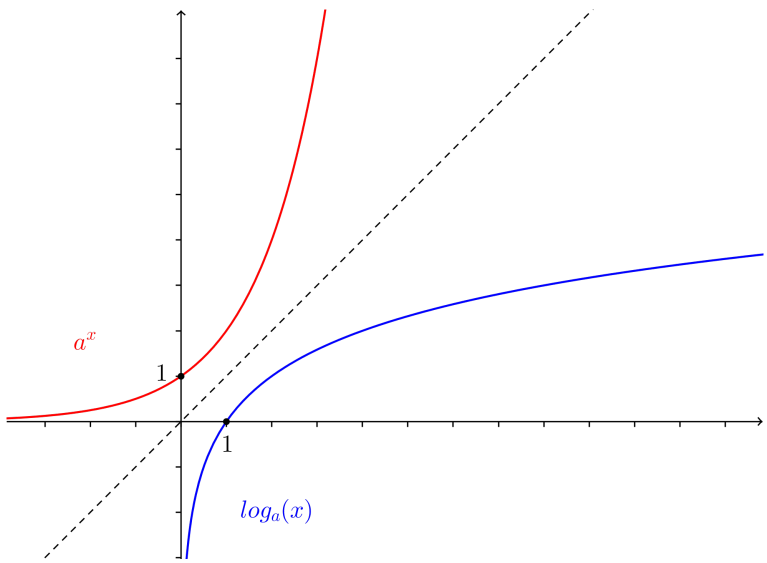


FIGURA 3.28. Gráfico de la función logaritmo, $a > 1$

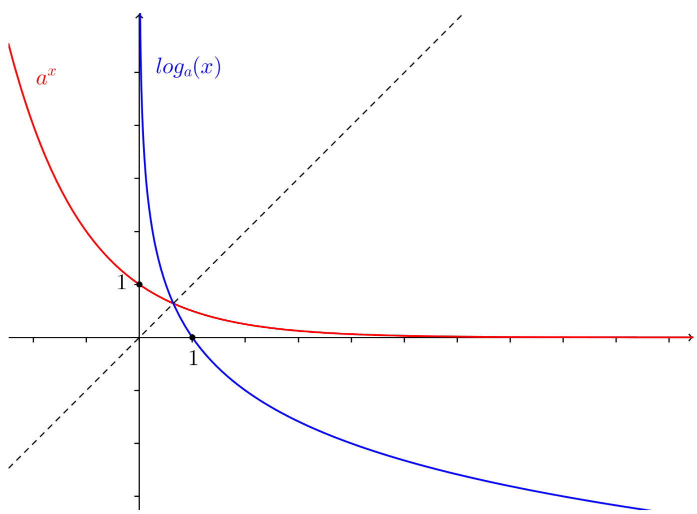


FIGURA 3.29. Gráfico de la función logaritmo, $a < 1$

3.3.3. Medida de ángulos en radianes

Consideremos la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen, como en le figura.

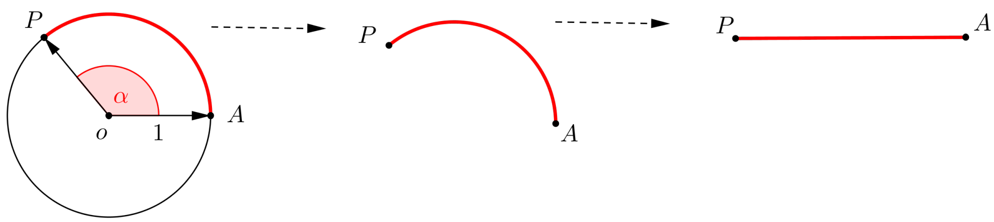


FIGURA 3.30. Medida de ángulos en radianes

Definición 3.32 (Ángulo positivo)**.** Dado un punto P en la circunferencia, diremos que el ángulo α es un **ángulo positivo** cuando hay que rotar el rayo OA, en el sentido antihorario, para obtener el rayo OP.

La medida de este ángulo en **radianes**, será el largo del arco de circunferencia $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$.

Diremos que el punto P se obtiene de rotar en el **ángulo positivo** α respecto del punto O el punto A.

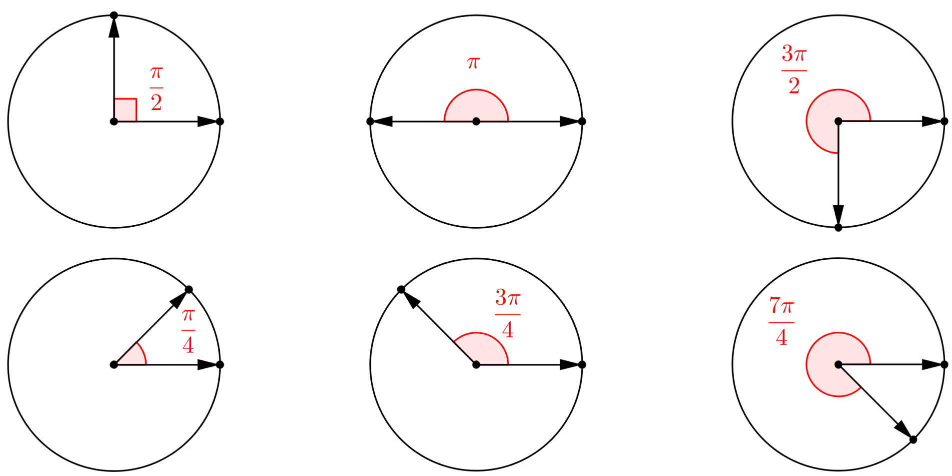


FIGURA 3.31. Ángulos positivos

Definición 3.33 (Ángulo negativo)**.** Dado un punto P en la circunferencia, diremos que el ángulo α es un **ángulo negativo** cuando hay que rotar el rayo OP, en el sentido horario, para obtener el rayo OA.

La medida de este ángulo en **radianes**, será inverso aditivo de el largo del arco de circunferencia $\widehat{\mathrm{AP}}$.

Diremos que el punto A se obtiene de rotar en el **ángulo negativo** α respecto del punto O el punto P.

Además cómo la medida de una vuelta en sentido positivo es igual a 2π, entonces cuando un ángulo da $k \in \mathbb{N}$ vueltas en sentido antihorario este ángulo tiene como medida $2k\pi$.

De este mismo modo si el ángulo da $k \in \mathbb{N}$ vueltas en sentido horario, entonces la medida de esta ángulo será $-2k\pi$.

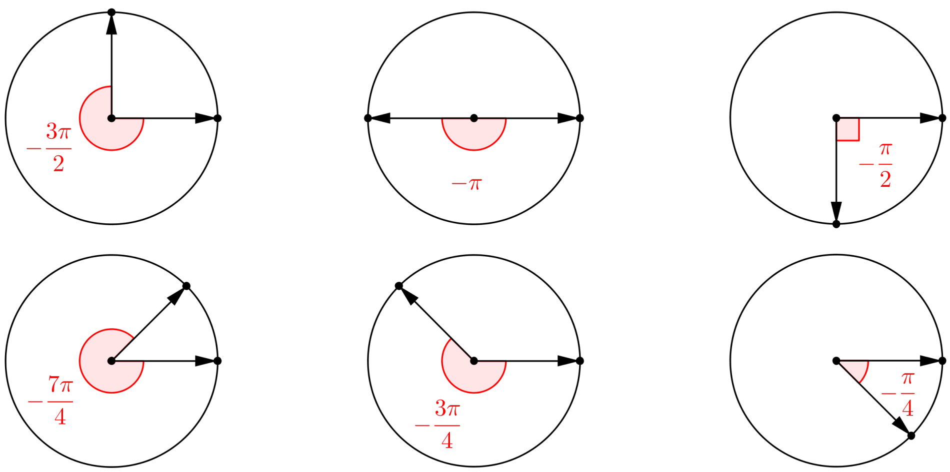


Figura 3.32. Ángulos negativos

3.3.4. Funciones Trigonométricas

Consideremos la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, consideremos ahora el punto P_α que se obtiene al rotar en un ángulo α el punto $(1,0)$ como en la figura, con esto podemos definir las funciones trigonométricas seno y coseno de la siguiente manera.

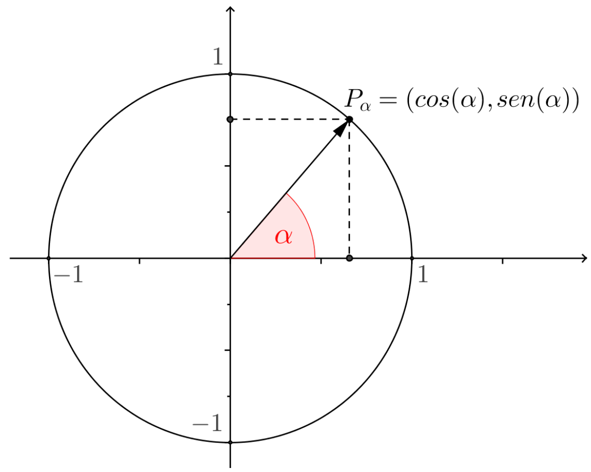


FIGURA 3.33. Funciones trigonométricas

Definición 3.34 (Función coseno)**.** Definimos la función **coseno** $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como aquella que a cada ángulo α la asocia la abscisa del del punto P_α.

Definición 3.35 (Función seno)**.** Definimos la función **seno** $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como aquella que a cada ángulo α la asocia la ordenada del del punto P_α.

Observación 3.6. De la definición de las funciones seno y coseno se deduce la llamada Identidad Trigonométrica Fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Propiedades de la función coseno

- Es periódica de periodo 2π.
- Es una función par. Por lo tanto basta conocerla en $[0, \pi]$ para saber su comportamiento global.
- Tiene un cero en $\frac{\pi}{2}$, por lo que $Z(cos) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- En $[0, \frac{\pi}{2}]$ es positiva y es negativa en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- Decrece en $[0, \pi]$.

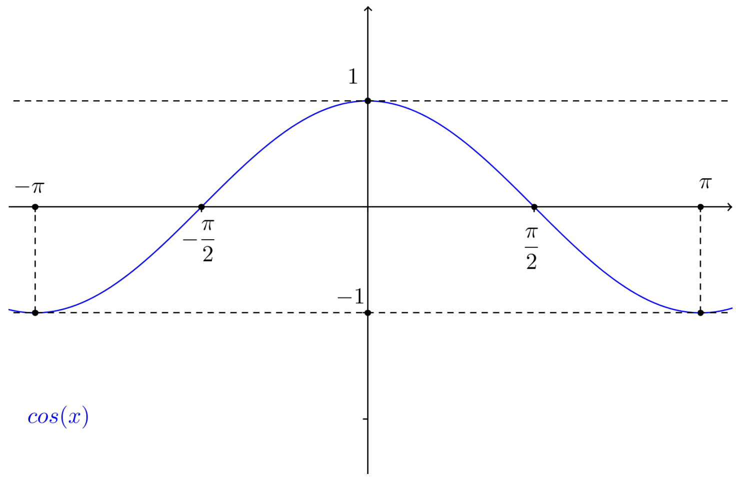


FIGURA 3.34. Gráfico de la función coseno

Propiedades de la función seno

- Es periódica de periodo 2π.
- Es una función impar. Por lo tanto basta conocerla en $[0, \pi]$ para saber su comportamiento global.
- Tiene un cero en 0 y otro en π, por lo que $Z(sen) = \{x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- En $[0, \pi]$ siempre es positiva.
- Crece en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y decrece en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

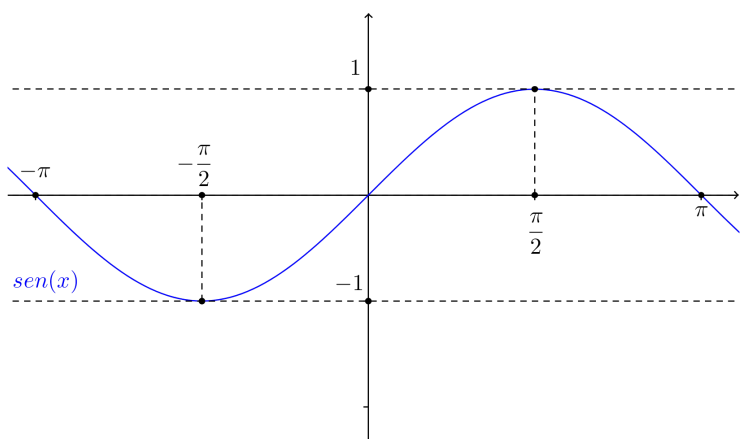


FIGURA 3.35. Gráfico de la función seno

Definición 3.36 (Función tangente)**.** Se define la función **tangente** por $\tan : \mathbb{R} \setminus Z(\cos) \to \mathbb{R}$ que a cada ángulo α le asocia $tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Propiedades de la función tangente

- Es periódica de periodo π.
- Sus ceros son los ceros de la función seno.
- Es una función impar.
- Es positiva en $(0, \frac{\pi}{2})$ siempre es positiva.
- Es estrictamente creciente en cada intervalo de la forma $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

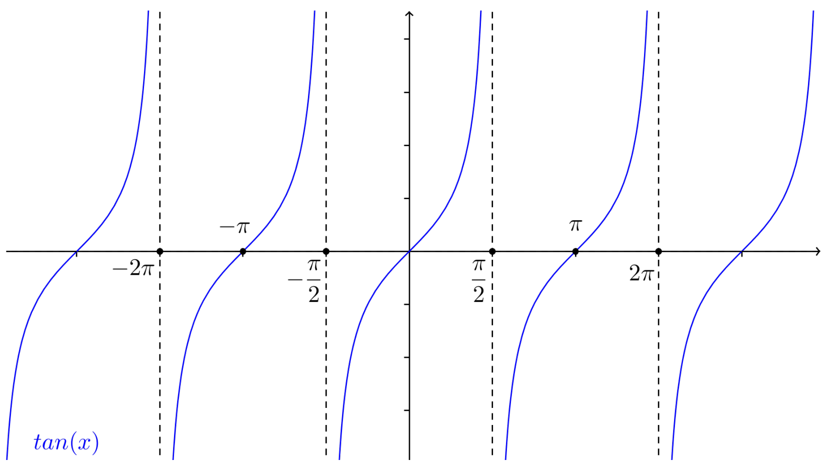


FIGURA 3.36. Gráfico de la función tangente

Observación 3.7. La cantidad $\tan(\alpha)$ corresponde a la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el punto P_α, como en la figura.

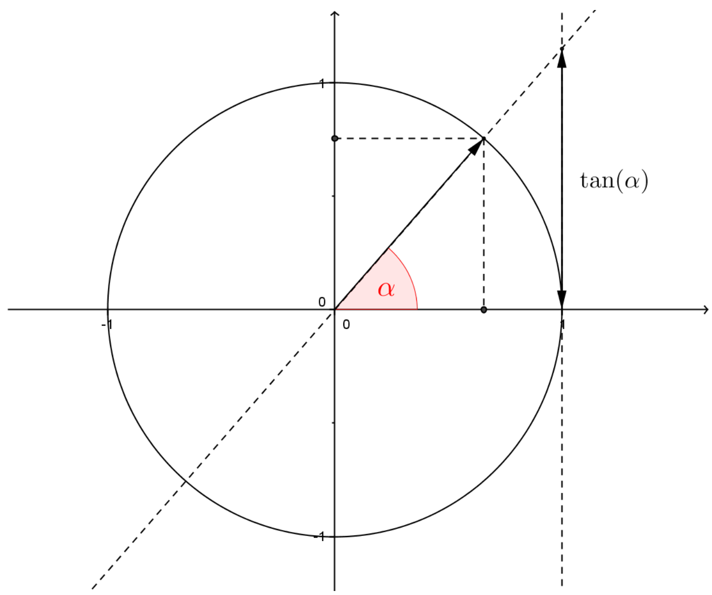


FIGURA 3.37. Representación de la tangente en la circunferencia unitaria

3.3.5. Funciones Recíprocas

Definición 3.37 (Funciones recíprocas)**.** Se definen las **funciones recíprocas** cotangente, secante y cosecante respectivamente por:

$$\begin{aligned} \cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ \sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)} \\ \csc(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

Identidades

- Si $\cos(x) \neq 0$, entonces:
$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$
- Si $\operatorname{sen}(x) \neq 0$, entonces:
$$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$

Algunos valores conocidos

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-$

3.3.6. Propiedades Importantes

Diferencia de ángulos en coseno:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

Suma de ángulos en coseno:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

Diferencia de ángulos en seno:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

Suma de ángulos en seno:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

Bibliografía

[1] Spivak, M. Calculus, Reverte,1993.
[2] Cominetti R., Matamala M., Introducción al Cálculo - Apuntes 1er año FCFM, U. de Chile, 2012.
[3] Gomez D., Rapaport I., Introducción al Álgebra - Apuntes 1er año FCFM, U. de Chile, 2012.
[4] San Martin J., Cominetti R., Matamala M., Calculo diferencial e integral - Apuntes 1er año FCFM, U. de Chile, 2012.