

Como sacar ceros de una cuadrática
(1) Factorización :

si se tiene $f(x) = x^2 + bx + c$

hay que buscar dos números "p" y "q"
tales que $pq = c$ y $p + q = b$

ej: $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$
pues $3 + 4 = 7$ y $3 \cdot 4 = 12$

ej: $x^2 - 8x - 9$; ojo la multiplicación
debe dar "-9" que es un número
negativo, o sea, p y q deben
tener signos contrarios.

así después de pensar

$$x^2 - 8x - 9 = (x - 9)(x + 1)$$

¿y de que sirve eso? pues
ahora es mucho más fácil
ver cuando $f(x)$ se hace "0"

ej: $x^2 + 7x + 12 = 0$ ¡No tengo idea!
ah pero si factorizo:

$$(x+3)(x+4) = 0 \quad \text{ah! es mucho más fácil.}$$

$$\boxed{x = -3} \text{ y } \boxed{x = -4}$$

② Completación de cuadrado:

lamentablemente NO siempre se puede factorizar

ej: $f(x) = \cancel{x^2 + 16x + 9} \quad x^2 + 16x + 9$

ej: $f(x) = x^2 + 16x + 9$ No hay dos números enteros que sumados den 16 y multiplicados 9. $\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}$

Antes de empezar recordemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

entonces lo que haré será intentar transformar $f(x)$ en una especie de cuadrado de binomio. Por qué.

Pues porque si recuerdas $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$
 si yo elimino el término con "x"
 (en el ejemplo: $16x$) será muy
 fácil de factorizar.

Veamos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ← el segundo al cuadrado
 el primero al cuadrado el doble del primero por el segundo

$x^2 + 16x + 9$
 ↑
 el primero al cuadrado, o sea el primero es "x" el doble del primero por el segundo
 si "x" es el primero ¿Quién es el segundo?

$$16x = 2 \times x$$

$$\Rightarrow \frac{16x}{2x} = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{8 = x} \leftarrow \text{el segundo es "8"}$$

Pero si 8 es el segundo, NO ESTÁ el segundo al cuadrado, no hay ningún 64!

Bueno, Ponto! ¿Qué?

Tú tienes toda la libertad de
sumar cero!

$$\begin{aligned} y: \quad 2 + 0 &= 2 \\ 4 + 0 &= 4 \\ 7 + 6 - 6 &= 7 + 0 = 7 \end{aligned}$$

Súmale 64! pero también quítaselo

$$x^2 + 16x + 9 = \underbrace{x^2 + 16x + 64}_{(x+8)^2} + 9 - 64$$

ahora eso cumple
perfecto con $(a+b)^2$
puedo escribirlo como
 $(x+8)^2$

$$\begin{aligned} x^2 + 16x + 9 &= (x+8)^2 + 9 - 64 \\ &= (x+8)^2 - 55 \end{aligned}$$

y esto es del estilo $z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$

en este caso $z = x+8$; $y = \sqrt{55}$

$$\text{así } x^2 + 16x + 9 = (x+8 - \sqrt{55})(x+8 + \sqrt{55})$$

$$\text{luego los ceros son } \left| \begin{array}{l} x = -8 + \sqrt{55} \\ x = -8 - \sqrt{55} \end{array} \right|$$

Creo que hoy no quedó claro el crecimiento, recordemos la definición de creciente:

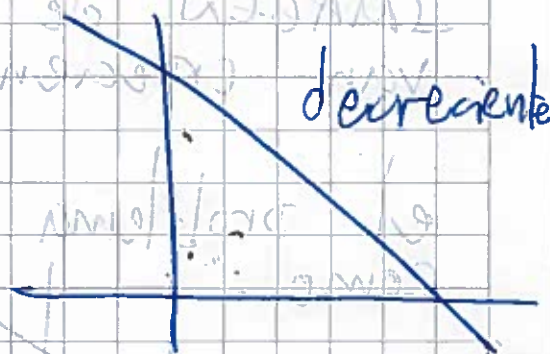
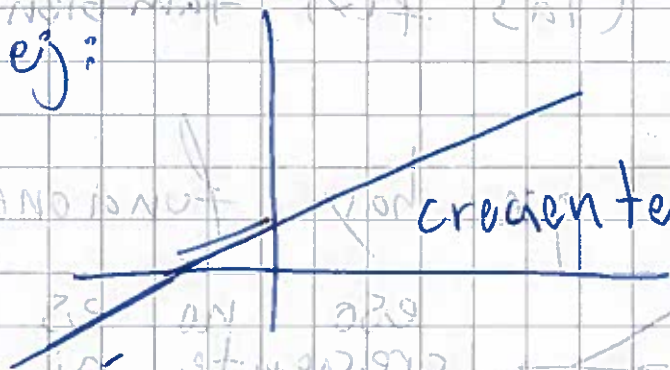
Si se cumple que:

a medida que " x " va creciendo $f(x)$ también va creciendo, entonces $f(x)$ es creciente!

Si se cumple que:

a medida que " x " va creciendo $f(x)$ va decreciendo, entonces $f(x)$ es decreciente

ej:



con matemáticas:

① $f(x)$ es creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

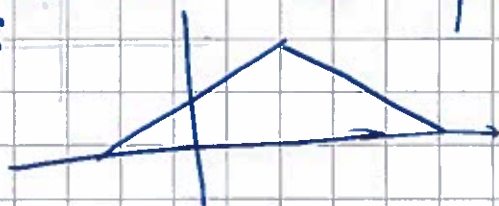
② $f(x)$ es decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

tiene sentido, con la definición ya mencionada, analicemos solo ①

$x_1 < x_2$ eso quiere decir que x_2 es mayor que x_1 (a medida que x crece); $f(x_2) > f(x_1)$

la IMAGEN de x_2 es mayor que la IMAGEN de x_1 (las $f(x)$ también van creciendo)

el problema es que hay funciones como:



eso no es
creciente ni
decreciente

ahí lo que hacemos es dividirla



y decimos ~~de~~
 en (a, b) es creciente y
 en (b, c) es decreciente

¿cómo descubro cuál es el punto b ?

b de existir será un punto que haga que $f(x)$ se indetermina o se haga cero.

¿Cómo demuestro crecimiento?

la forma más fácil es inventandote que $x_1 < x_2$ y ver que ocurre con el signo de $f(x_1) - f(x_2)$

① si $f(x_1) - f(x_2)$ te da ≤ 0

significa que $f(x_1) < f(x_2)$ o sea f es creciente pues yo había dicho $x_1 < x_2$

② si $f(x_1) - f(x_2)$ te da ≥ 0

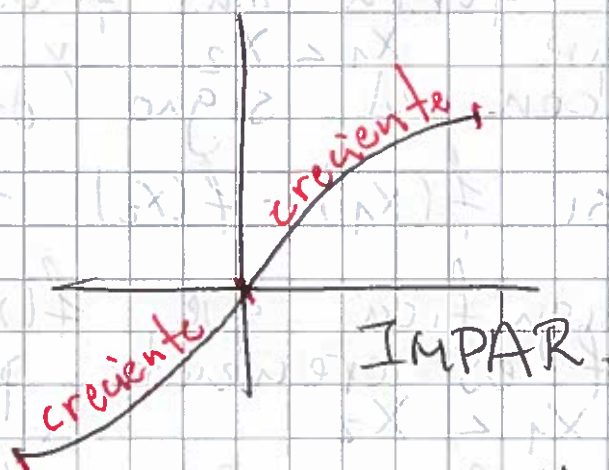
significa que $f(x_1) > f(x_2)$ o sea f es decreciente pues yo había dicho $x_2 > x_1$

Tipos importantes!

① si $f(x)$ es par y creciente (decreciente) en (a, b) entonces siempre $f(x)$ en $(-b, -a)$ es decreciente! (creciente)

② si $f(x)$ es impar y creciente (decreciente) en (a, b) entonces siempre $f(x)$ en $(-b, -a)$ es creciente (decreciente)

¿Por qué? fíjense en los gráficos



esto se da < pues las pares son simétricas respecto al eje y y las impares son simétricas respecto al centro

$$f(x) = \frac{|x| - 6}{|x| - 2}$$

Dom: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ pues son los únicos valores que indeterminan la expresión

Ceros: $x = 6$ y $x = -6$

Paridad: es par pues $f(x) = f(-x)$
gracias a que $|x| = |-x|$

Signos:

	$-\infty$	-6	-2	2	6	∞^+
$ x - 6$	+	-	-	-	+	+
$ x - 2$	+	+	-	+	+	+
$\frac{ x - 6}{ x - 2}$	+	-	+	-	+	+

por lo tanto la función es positiva en

$$(-\infty, -6] \cup (-2, 2) \cup [6, \infty^+)$$

y negativa en

$$[-6, -2) \cup (2, 6]$$

crecimiento:

Supongo que $X_1 < X_2$, como la $f(x)$ es par solo analizaré de $(0, \infty^+)$ y luego utilizaré el tip ①

Como en el 2 y en el 6 $f(x)$ se hace 0 o se indetermina analizaré $(0, 2)$ $(2, 6)$ $(6, \infty^+)$

y ahora a jugar! averigüemos que signo tiene:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{|x_1| - 6}{|x_1| - 2} - \frac{|x_2| - 6}{|x_2| - 2}$$

como tanto x_1 y x_2 son positivos, los valores absolutos están sobrando

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - 6}{x_1 - 2} - \frac{x_2 - 6}{x_2 - 2} &= \frac{(x_1 - 6)(x_2 - 2) - (x_2 - 6)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \\ &= \frac{(x_1 - 6)(x_2 - 2) - (x_2 - 6)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{X_1 X_2} - 2X_1 - 6X_2 + 12 - \cancel{X_2 X_1} + 2X_2 + 6X_1 - 12}{(X_1 - 2)(X_2 - 2)}$$

$$= \frac{4X_1 - 4X_2}{(X_1 - 2)(X_2 - 2)} = \frac{4(X_1 - X_2)}{(X_1 - 2)(X_2 - 2)}$$

yap es momento de analizar el signo, recordemos que yo dije $X_1 < X_2 \iff X_1 - X_2 < 0$

esto significa que el numerador es negativo!

Veamos el ~~denominador~~ ^{denominador} (recordar que tenemos tres intervalos)

Si X_1 y X_2 viven en $(0, 2)$ entonces tanto $(X_1 - 2)$ como $(X_2 - 2)$ son negativos, la multiplicación de dos negativos da positivo, lo que significa que el denominador es POSITIVO

luego la fracción da negativa

$f(X_1) - f(X_2) < 0$, o sea es creciente!

si x_1, x_2 viven en $(2, 6)$ entonces
tanto $(x_2 - 2)$ como $(x_1 - 2)$ son positivos
luego la fracción da negativa y
nóveramente f es creciente

finalmente en $(6, \infty^+)$ nóveramente tanto
 $(x_2 - 2)$ como $(x_1 - 2)$ son positivos y
 f es creciente

finalmente por el tip ①

f es decreciente en $(-2, 0)$
 f es decreciente en $(-6, -2)$
 f es decreciente en $(-\infty, -6)$

¿ es $f(x)$ inyectiva?

POR SUPUESTO QUE NO!

POES f es par! POR LO TANTO

" x " distintos quedan tener
la misma imagen.