

Análisis de funciones →

Dominio: TODOS los valores que puede tomar "x"

REGLAS:

- EN UNA FRACCIÓN JAMÁS SE DIVIDE POR CERO.
- EN UNA RAÍZ, LO DE ADENTRO DEBE SER POSITIVO.

ej: $x + 3$ No amenaza ninguna de las dos reglas por lo tanto su dominio son todos los Reales.

ej: $\frac{x+9}{x-3}$ NO ME IMPORTA que el numerador sea cero por lo que el -9 no es problema. pero el 3 sí.
Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$

ej: $\sqrt{x}$ Para enfrentar esto me pregunto:
¿A partir de qué valor lo de adentro de la raíz se hace positivo? EN ESTE CASO x debe ser mayor o igual a 0
Dominio $[0, \infty^+)$ ← ¿qué significa?

$[0, \infty^+)$ es un intervalo y significa: TODOS los números que están entre 0 (incluyéndolo) e infinito (sin incluirlo).

Si un intervalo tiene " $[$ " incluye al número, si tiene " $)$ " No lo incluye. OJO el ∞^+ y el ∞^- JAMÁS se incluyen.

ej: $(2, 8)$: del 2 al 8 SIN incluir ambos

$[2, 8)$: del 2 al 8, sin incluir el 8 pero sí al 2.

$[2, 8]$: del 2 al 8 incluyendo ambos.

UN EJEMPLO MÁS AVANZADO:

$\sqrt{\frac{1}{x}}$ ACA tenemos doble restricción

1) $\frac{1}{x}$ debe ser mayor o igual a 0

2) x debe ser distinto de 0

~~¿Qué signo toma $\frac{1}{x}$?~~
~~Recomendación~~
~~analiza función con la~~
~~que pasa si~~
~~es mayor~~
~~es menor~~

¿De qué depende el signo de $\frac{1}{x}$?

Cómo toda fracción hay cuatro combinaciones posibles de signos

$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

en este caso el numerador es "1"
el no cambia de signo es
SIEMPRE positivo, o sea solo
hay que fijarse en el numerador

Así concluyo que x debe ser positiva

Por lo tanto el dominio de

$\sqrt{\frac{1}{x}}$ son solo los positivos

$= [0, \infty^+)$ también se escribe

$\mathbb{R}^+$

Problema aún más difícil
determinar dominio de

$$\sqrt{\frac{x+6}{x-2}}$$

es fácil ver que la primera restricción es $x \neq 2$

pero ¿cómo se cuando $\frac{x+6}{x-2}$ será positivo?
Para ello utilizamos una tabla de signos

- ① factorizar al máximo la expresión (ya está hecho)
 - ② Ver donde se hace 0 CADA factor
- en este caso $\boxed{x = -6}$ y $\boxed{x = 2}$

	$-\infty$	-6	2	∞^+
$x+6$	-	+	+	
$x-2$	-	-	+	
$\frac{x+6}{x-2}$	+	-	+	
	SIRVE		NO!	SIRVE

↖
↗
Veo el signo de cada uno en cada intervalo

↖
Veo el signo del total en cada intervalo

Por lo tanto el dominio es
 $(-\infty, -6] \cup (2, \infty^+)$

SIGNOS : la forma más fácil
de analizar signos es
con la tabla anterior

ej : $\frac{(x-3)(x+3)}{2x-8}$

① Factorizar dejando la función
 $\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-4)}$

② saco los "0" $x=3$; $x=-3$; $x=4$

③ TABLA

	$-\infty$	-3	3	4	$+\infty$
$x-3$	-	-	+	+	
$x+3$	-	+	+	+	
$x-4$	-	-	-	+	
$\frac{(x-3)(x+3)}{x-4}$	-	+	-	+	

Así la función será positiva en

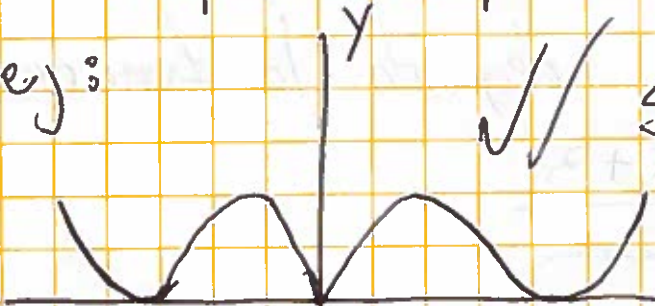
~~$[-3, 3)$~~ $[-3, 3) \cup (4, +\infty)$

y NEGATIVA en $(-\infty, -3) \cup (3, 4)$

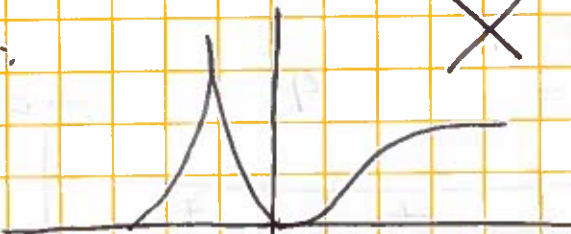
ADemás LA función se hace 0 en $\{-3, 3\}$
v so. indetermina en $\{4\}$

Paridad: existen 3 tipos de funciones:

① Pares: son funciones simétricas respecto al eje y .
siempre cumplen que $f(x) = f(-x)$

ej:  $\checkmark$ SI!

(Se supone que el eje y es un espejo)

ej:  $\times$ NO!

ej: $f(x) = |x|$ $\checkmark$ pues

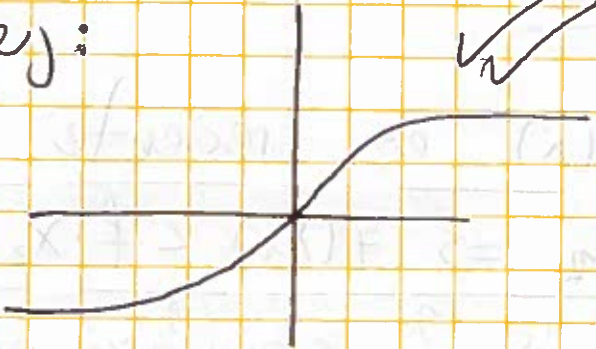
$$f(x) = |x| \text{ y } f(-x) = |-x|$$

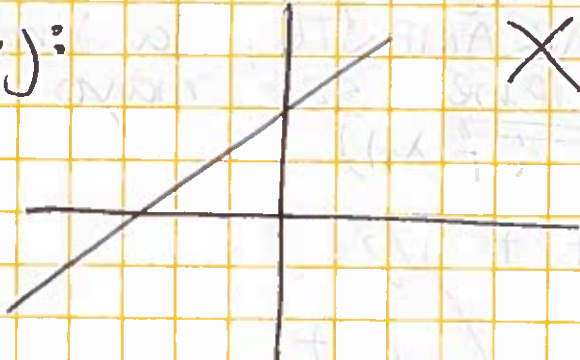
y se cumple que $|x| = |-x|$

ej: $\frac{x^2 + 7}{|x| - 9}$ $\checkmark$ pues $f(x) = f(-x)$
 $\frac{x^2 + 7}{|x| - 9} = \frac{(-x)^2 + 7}{|-x| - 9}$

(2) IMPARES: son funciones simétricas respecto al CENTRO

siempre cumplen que: $f(x) = -f(-x)$

ej:  SI!

ej:  NO!

ej: $f(x) = x$ ✓ pues

$$f(x) = x ; f(-x) = -x$$

$$\Rightarrow x = -f(-x) \checkmark$$

$$\Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

ej: $f(x) = x + 6$ X pues

$$f(x) = x + 6 ; f(-x) = -x + 6$$

$$\begin{aligned} -f(-x) &= \\ -(-x + 6) &= \\ &= x - 6 \end{aligned}$$

NO SON iguales por lo tanto no es impar.

③ las que no son ni pares ni impares
ej: $f(x) = x + 3$

CRECIMIENTO

① crecientes: $f(x)$ es creciente si y solo si:

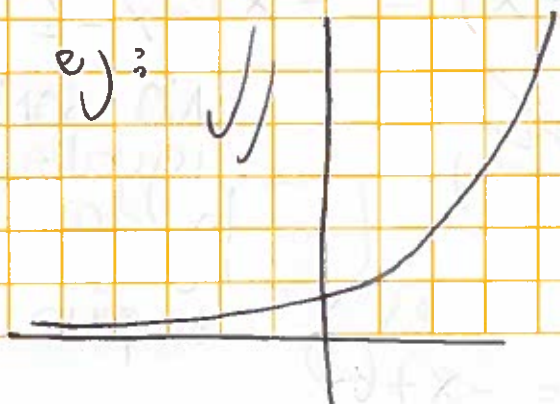
$$X_1 < X_2 \Rightarrow f(X_1) < f(X_2)$$

¿Qué significa eso? significa que si tu tomas un X_2 que sea mayor que X_1 , NECESARIAMENTE, la imagen de X_2 ($f(X_2)$) debe ser mayor que la imagen de X_1 ($f(X_1)$)

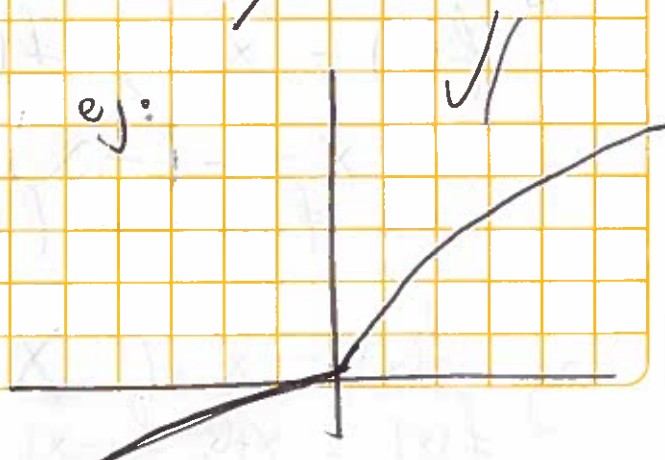
ej: $f(x) = x + 7$ ✓✓

si $X_1 < X_2$ $+ 7$
 $X_1 + 7 < X_2 + 7$
 $f(X_1) < f(X_2)$ // ✓

ej: ✓✓



ej: ✓✓



② decrecientes, $X_1 < X_2 \Rightarrow f(X_2) < f(X_1)$

es lo mismo pero al revés;
si X_2 es más grande que X_1 , entonces
la imagen de X_1 debe ser más grande
que la de X_2

ej: ~~trabajando en los positivos~~

$\frac{1}{x}$ es decreciente pues

a medida que aumenta el denominador
disminuye el valor de la fracción.

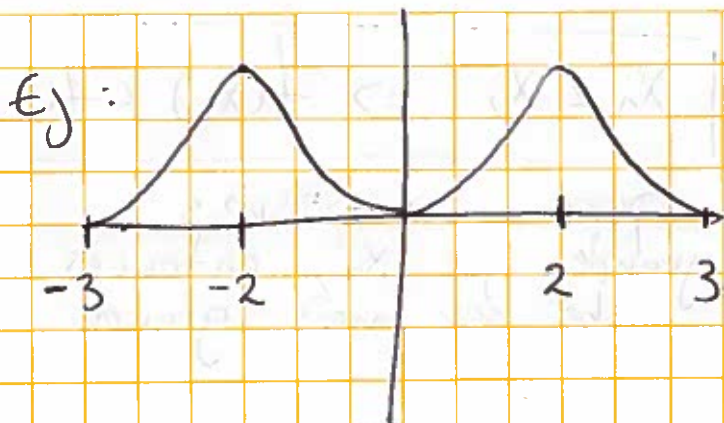
Ojo hay funciones que en algunas
partes son crecientes y en otras decrecientes

ej: $f(x) = |x|$ es creciente de $(0, \infty)$
pero decreciente en $(-\infty, 0)$

¿Y cómo se eso yo?

Me ayudo de la paridad:

si $f(x)$ es par entonces en las
partes que sea simétrica tendrá
crecimientos **CONTRARIOS**. si $f(x)$
es impar entonces en las partes
que sea simétrica tendrá crecimientos
IGUALES.



es claro que la función es par

en $(0, 2)$ es creciente, en

$(0, -2)$ es decreciente

en $(2, 3)$ es decreciente,

en $(-3, -2)$ es creciente

finalmente la función es
 creciente en $(-3, -2) \cup (0, 2)$ ✓
 decreciente en $(-2, 0) \cup (2, 3)$ ✓

INYECTIVIDAD:

Se dice que una función es inyectiva si al tirar una línea horizontal no se corta más de un punto ej:



En palabras matemáticas:

$$\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{si hay dos puntos con imagenes iguales}} \Rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}_{\text{es porque los puntos son el mismo.}}$$

Ej: $f(x) = x + 3$ lo es, veamos que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1 + 3 &= x_2 + 3 \\ \boxed{x_1 &= x_2} \end{aligned}$$

ej: $f(x) = x^2$ NO lo es, pues

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1^2 &= x_2^2 \end{aligned}$$

¿ $x_1 = x_2$? NO necesariamente
pues si $x_1 = -x_2$
también se cumple.

SOBRE YECTIVIDAD:

En mi opinión es de los conceptos más difíciles, se dice que $f(x)$ es sobreyectiva si el conjunto imagen es el mismo que de llegada.

conjunto partida

ej: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(x) = x + 3$
conjunto de llegada

¿ es sobreyectiva? ¿ Hay algún Real que no sea imagen de NADIE?
en este caso $\neq$ SI es sobreyectiva
pues $\forall y \in \mathbb{R} \quad y = f(y-3)$

¿ Qué! ? tranquilos lo que ahí dice es que todo y que viva en el conjunto imagen tiene pre-imagen que es $y-3$

Piensenlo dime cualquier número y yo te digo réstale 3 y métele a $f(x)$ te apuesto que te dará el mismo número.

ej: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(x) = x^2$ NO es sobreyectiva
pues TODOS los negativos no tienen pre-imagen $-5 = x^2$? eso no tiene solución

ej: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ ; f(x) = x^2$ SI es sobreyectiva
pues $\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad y = f(\sqrt{y})$

ej: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$ No es sobreyectiva

¿ Para que valor de x , $\frac{1}{x}$ te dará 0?