Auxiliar 4, pauta

Matemática 1, sección 1.
Profesor: Felipe Célèry.
Auxiliar: Raimundo Saona

Introducción

Recuerden que hay muchas maneras de realizar el desarrollo de un ejercicio. Este documento consta de una forma de pensar cada problema.

Se aconseja que al leer cada ejercicio se acompañen de papel y lápiz para escribir su propio desarrollo.

Primero, se revisó la pregunta 2 del ejercicio 1. La explicación está en u-cursos.

Segundo, se revisó la pregunta 4, casi entera, del ejercicio 1. La explicación está en u-cursos.

Problema 1 y 2, Auxiliar 4.

Demostrar propiedades en conjuntos

Sean A, B y C conjuntos tales que $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap C^c) \subseteq (B \cap C^c)$. Demuestre que $A \subseteq B$.

Problema 3, Auxiliar 4.

PAUTA:

Recordemos la definición de "ser subconjunto de" para dos conjuntos A y B:
$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$

Para demostrar que $A \subseteq B$, tomaremos un $x \in A$ arbitrario, conlcuiremos (con la información del problema) que éste está en B. Así podremos concluir que $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ se cumple para todo x.

La siguiente demostración razona por casos.

Problema 3, Auxiliar 4.

Sea $x \in A$ arbitrario.Ya que x puede estar en o no en C, revisamos los casos posibles:

Caso 1: $x \in C$.
Como $x \in A \wedge x \in C$, tenemos que: $x \in A \cap C$.
Ya que, por información del problema, $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$, se tiene que: $x \in (B \cap C)$.
Luego, $x \in B \wedge x \in C$.
Así, $x \in B$.

Caso 2: $x \in C^c$.
Como $x \in A \wedge x \in C^c$, tenemos que: $x \in A \cap C^C$.
Ya que, por información del problema, $(A \cap C^c) \subseteq (B \cap C^c)$, se tiene que: $x \in (B \cap C^c)$.
Luego, $x \in B \wedge x \in C^c$.
Así, $x \in B$.

En cualquiera de los dos casos $x \in B$.

Como no hay otro caso posible, se concluye que $x \in B$.

Por la arbitrariedad de x, se conluye que: $\forall x \; (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. Así:

$$A \subseteq B$$

Problema 3, Auxiliar 4.

Igualdad de conjuntos

Demuestre la siguiente igualdad de conjuntos:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B^c \cup C)$$

Problema 4, Auxiliar 4.

PAUTA:

Recordemos algunas propiedades básicas de conjuntos, siendo A, B y C conjuntos:

(1) $A \setminus B = A \cap B^c$

(2) $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$

(3) $(A^c)^c = A$

Para demostrar la igual de conjuntos pedida, reduciremos la expresión usando estas propiedades hasta poder concluir claramente la igualdad.

Problema 4, Auxiliar 4.

Aplicando la propiedad (1) dos veces en la expresión $A \setminus (B \setminus C)$, se llega a:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c)^c$$

Por la propiedad (2) y (3), se tiene que:

$$A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$$

Uniendo las igualdades se concluye:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B^c \cup C)$$

Problema 4, Auxiliar 4.