Auxiliar 3, pauta

Matemática 1, sección 1.
Profesor: Felipe Célèry.
Auxiliar: Raimundo Saona

Introducción

Recuerden que hay muchas maneras de realizar el desarrollo de un ejercicio. Este documento consta de una forma de pensar cada problema.

Se aconseja que al leer cada ejercicio se acompañen de papel y lápiz para escribir su propio desarrollo.

Negar la proposición

Niege la siguiente proposición:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x < y) \Rightarrow (x^2 \geq y)$$

Problema 1, Auxiliar3.

PAUTA:

Recordemos las siguientes negaciones básicas, dado que p(x) es una función proposicional y A un conjunto:

(1) $\sim (\forall x \; p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \sim p(x))$

(2) $\sim (\exists x \; p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \sim p(x))$

(3) $\sim (\forall x \in A \; p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A \sim p(x))$

(4) $\sim (\exists x \in B \; p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in B \sim p(x))$

También, debemos recordar las siguientes propiedades de la lógica proposicional:

(5) Caracterización de la implicancia: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

(6) De Morgan: $\sim (p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

Problema 1, Auxiliar3.

Para negar la proposición, aplique sucesivamente las propiedades (3) y (4), identificando A y B con los conjuntos correspondientes y p(x) con la función proposicional correspondiente.

Luego, para terminar, aplique (5) y (6), identificando para cada caso p y q con las proposiciones correspondientes.

Teniendo en cuenta que se cumplen las siguientes propiedades: $\sim (x \geq y) \Leftrightarrow (x < y)$, se llega al siguiente resultado:

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x < y) \wedge (x^2 < y)$$

Problema 1, Auxiliar3.

Determinar el valor de verdad

Se definen las siguientes funciones proposicionales:

p(x, y) $:= x - y > 1$.

q(x, y) $:= 2x + 3y < 2$.

A $:= \{2, 1, -1, -3\}$.

B $:= \{-4, 1, -\frac{1}{2}\}$.

Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\forall x \in B\ \exists y \in A\ q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$$

Problema 2, Auxiliar3.

PAUTA:

Notemos que B es un conjunto finito de elementos y se quiere demostrar una proposición del estilo:

$$\forall x \in B \; r(x)$$

Desarrollaremos el problema por inspección, es decir, revisaremos directamente si la proposición es o no verdadera evaluando r(x) para cada elemento x en B (r(x) := $\exists y \in A \; q(x,y) \Rightarrow p(x,y)$).

El primer caso a revisar es: x = -4.

Problema 2, Auxiliar3.

El primer caso a revisar es: x = -4.

Para vefrificar si se cumple r(-4), hay que determinar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\exists y \in A \ q(-4, y) \Rightarrow p(-4, y)$$

Nos basta que exista algún "$y \in A$" que haga de la implicancia verdadera para que la proposición anterior sea verdadera.

Revisando caso por caso, es decir, tomando y = 2, y = 1, y = -1, y = -3, podemos verificar que para ninguno de estos casos la implicancia se cumple.

De lo anterior, se deduce que r(-4) es falso. Con lo que la proposición inicial es falsa.

Problema 2, Auxiliar3.

"Pertenecer" ($\in$) y "ser subconjunto de" ($\subseteq$)

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$$
$$\emptyset \subseteq \emptyset$$
$$\{\emptyset\} \in \emptyset$$
$$\emptyset \in \emptyset$$
$$\{a, b\} \in \{a, b\{\{a, b\}\}\}$$

Problema 3, Auxiliar3.

PAUTA:

Recordemos las siguientes definiciones y propiedades básicas, siendo A y B conjuntos:
(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
(2) $(x \in \emptyset) \Leftrightarrow F$
(3)$(\emptyset \subseteq A) \Leftrightarrow V$

Para el primer caso $(\{\emptyset\} \subseteq \emptyset)$, aplicamos la definición (1) para obtener la siguiente equivalencia:

$$[\{\emptyset\} \subseteq \emptyset] \Leftrightarrow [\forall x \ (x \in \{\emptyset\}) \Rightarrow (x \in \emptyset)]$$

Para verifica el valor de verdad de la proposición de la derecha, basta tomar $x = \emptyset$. En este caso, la hipótesis $(x \in \{\emptyset\})$ es verdadera y la conclusión $(x \in \emptyset)$ es falsa por la propiedad (2).

De lo anterior se concluye que: $(\{\emptyset\} \subseteq \emptyset) \Leftrightarrow F$.

Problema 3, Auxiliar3.

Para $\emptyset \subseteq \emptyset$, aplíquese (3).

Para $\{\emptyset\} \in \emptyset$ y $\emptyset \in \emptyset$, aplíquese (2).

Para $\{a, b\} \in \{a, b\{\{a, b\}\}\}$, simplemente se chequea a mano.

Así, se obtiene que:

$$(\emptyset \subseteq \emptyset) \Leftrightarrow V$$
$$\{\emptyset\} \in \emptyset \Leftrightarrow F$$
$$\emptyset \in \emptyset \Leftrightarrow F$$
$$\{a, b\} \in \{a, b\{\{a, b\}\}\} \Leftrightarrow F$$

Problema 3, Auxiliar3.

Igualdades de conjuntos

Demuestre las siguientes igualdades para A y B conjuntos:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

Problema 4, Auxiliar3.

PAUTA:

Recordemos las siguientes definiciones básicas, para A y B conjuntos:

(1) $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

(2) $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$

(3) $x \notin A \Leftrightarrow \sim (x \in A)$

(4) $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$

(5) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$

(6) $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$

Problema 4, Auxiliar3.

Para demostrar la primera igualdad, aplicamos (1). Luego, en la equivalencia resultante, al lado izquierdo ($x \in (A \cap B)^c$) le aplicamos (2), (3), (6), De Morgan, (2) y (4), en ese orden, sucesivamente, para llegar al lado derecho ($x \in (A^c \cup B^c)$). Con lo que la equivalencia en cuestión es una tautología y queda demostrada la primera igualdad.

Para demostrar la segunda igualdad, aplicamos (1). Luego, en la equivalencia resultante, al lado izquierdo ($x \in (A \setminus B)$) le aplicamos (5), (2) y (6), en ese orden, sucesivamente, para llegar al lado derecho ($x \in (A \cap B^c)$). Con lo que la equivalencia en cuestión es una tautología y queda demostrada la segunda igualdad.

Problema 4, Auxiliar3.